Feuille TD : Révisions suites

1 Rappels sur les suites

1.1 Suites récurrentes réelles

Soit $f\colon I \to I$ une fonction définie sur un intervalle I et telle que $f(I) \subset I$. On considère $a \in I$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

I. Dénition de la suite

Pour montrer que la suite est bien définie, il est souvent nécessaire de montrer par récurrence une propriété du type

$$\mathcal{P}_n : \ u_n \ \text{ existe et } \ u_n \in I$$

Remarque : Si l'intervalle I est un segment $[c, b]$ pour $c, b \in \mathbb{R}$, alors on conclue que u_n est **bornée**.

• **Réflexe !** S'assurer que la suite est bien définie. Si on n'y prend pas garde, on mène une étude qui n'a pas lieu d'être.

II. Monotonie de la suite

1. Si f est croissante sur I, alors (u_n) est est monotone :
   — (u_n) est croissante si $f(u_0) = u_1 \geq u_0$,
   — (u_n) est décroissante si $f(u_0) = u_1 \leq u_0$.
2. Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones :
   — si $u_2 \geq u_0$, alors (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante.
   — si $u_2 \leq u_0$, alors (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.

• **Réflexe !** Etudiez les variations de f et le signe de $f(x) - x$. Ceci permet de dire très rapidement si la suite (u_n) est est monotone et préciser la monotonie.

III. Convergence de la suite

Si f est continue sur I et si (u_n) converge vers l, alors $f(l) = l$. On cherche donc la limite de la suite parmis les points fixes de f.

• **Réflexe !** Si f est continue, s'assurer que f possède au moins un point fixe. Dans le cas contraire, on peut conclure que la suite u_n diverge.

1.2 Suites à valeurs complexes

On étend aux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ toutes les propriétés des suites de réels, sauf celles qui font référence à l'ordre.
Pour les propriétés où la distance $|x-y|$ intervient, la valeur absolue est remplacée par le module, qui se note de la même façon. Par exemple :

— une suite (z_n) est bornée si pour tout $n, \exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|z_n| \leqslant M$.

— une suite (z_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $\quad |z_n - l| \leqslant \varepsilon$.

• **Attention !** On ne parle pas de suite complexe croissante, décroissante, majorée ou minorée, car contrairement à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ n'est pas naturellement muni d'une relation d'ordre.

Convergence : Soit (z_n) une suite de complexes. La suite (z_n) converge vers l dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les suites $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(l)$ et $\mathrm{Im}(l)$.

1.3 Travaux dirigés

Exercice 1. Étudiez la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour toutes les valeurs $u_0 \in [0, +\infty[$.

Exercice 2 (Suite de Héron d'Alexandrie, 1er siècle av JC)**.** On considère $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ et la suite définie par $u_0 \neq 0, \quad u_{n+1} = f(u_n)$. Trouvez un intervalle I tel que la suite soit bien définie sur I, puis l'étudier en fonction de $u_0 \in I$ (monotonie et limite éventuelle).

Exercice 3 (Partiel 2014)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ et on définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ en posant $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Dressez le tableau des variations de f et tracer approximativement son graphe en prenant 2 cm comme unité de longueur sur chacun des axes.
2. Montrez que la suite u_n est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \in [1/2, 3]$.
(Indication : montrez que $f([0,3]) \subset [1/2, 3]$.)
3. Calculez et comparer u_1 et u_2 . Représentez graphiquement les termes $u_0, \ldots, u_4$.
4. Montrez que (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.
5. Déterminez un réel $k \in]0, 1[$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
6. Montrez que f possède un unique point fixe $l \in [1/2, 1]$ et en déduire la convergence de u_n.

Exercice 4. Soit la suite $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} + \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n/4}}{n}$. Étudiez la convergence de z_n en regardant ses parties réelle et imaginaire $a_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\cos(n/4)}{n}$ et $\quad b_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sin(n/4)}{n}$.

Exercice 5. On note $D = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \leq 1\}$. On veut étudier la suite à valeurs complexes $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ où on définit la fonction F :

$$F : D \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \frac{z^3 + 3i}{4}.$$

1. Montrez que $F(D) \subset D$. En déduire que la suite u_n est bien définie et bornée.
2. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, montrer que $X^3 - a^3 = (X-a)Q(X)$ pour un polynôme Q de degré 2.
3. Montrez que F est (3/4)-contractante sur D.
(Indication : montrez que pour tous $x, y \in D$, on a $|F(x) - F(y)| \leq \frac{3}{4}|x-y|$.)
4. Montrez que la suite u_n est de Cauchy. En déduire la convergence de u_n vers une limite $\ell \in D$.
5. Est-ce que la limite ℓ dépend du choix de la condition initiale $u_0 \in D$? Justifiez votre réponse.