Feuille TD : Suites numériques

Exercice 1 (Sous-suites)**.**

1. Considérons la suite $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Extraire une sous-suite convergente.
2. Considérons la suite $\left(n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Extraire une sous-suite strictement monotone.

Exercice 2 (Une suite de Cauchy)**.** Montrer que la suite u définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ est de Cauchy.

Exercice 3 (Sommes télescopiques et suites de Cauchy)**.**
On définit les suites S et T par $S_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $T_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. En utilisant $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, montrer que S est convergente. Notamment, elle est de Cauchy.
2. En déduire que la suite de terme général $\sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)}$ est de Cauchy.
3. Montrer que la suite T est convergente.

Exercice 4 (Moyenne arithmético-géométrique)**.**
On fixe a et b deux réels strictement positifs. On définit deux suites u et v par :

$$u_0 = \frac{a+b}{2} \text{ et } \frac{1}{v_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \text{ ; puis pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$.
2. En déduire que u est décroissante et v est croissante.
3. Montrer qu'elles sont toutes les deux convergentes et qu'elles ont la même limite.

Exercice 5 (La constante d'Euler)**.**
On considère la suite $H = (H_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$H_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. On définit a suite H' par $H'_n = H_n - \frac{1}{n}$. Montrer que H et H' sont adjacentes. On note γ leur limite : c'est la constante d'Euler.
2. Montrer $0 < \gamma < 1$. (*Remarque : elle vaut approximativement 0,577215.*)