Feuille TD : Matrice d'une application linéaire

Exercice 1 Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note ϕ l'application linéaire définie par $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.

1. Écrire la matrice A de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. Déterminer le noyau de cette application.
3. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
4. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3.
5. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
6. Calculer $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3.
7. Écrire la matrice B de ϕ dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application ϕ.
8. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
9. Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 2 Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
2. Même question avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}'$ est la base $(\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$.
3. Même question avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 3 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 4 Soient A, B deux matrices semblables (i.e. il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$). Montrer que

1. Si l'une est inversible, l'autre l'est aussi.
2. Si l'une est idempotente, l'autre l'est aussi.
3. Si l'une est nilpotente, l'autre l'est aussi.
4. Si $A = \lambda I$, alors $A = B$.

Exercice 5 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Soient $e_1 = (-2, 3)$ et $e_2 = (-2, 5)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases}$.

anca.nitulescu@ens.fr

Exercice 6 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées f_A et f_B.

Exercice 7 Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient

1. $M^2 = 0$;
2. $M^2 = M$;
3. $M^2 = I$.

Exercice 8 Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$.
3. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $1, X, \dots, X^n$.
4. Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leur dimension respective.
5. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 9 Pour toute matrice carrée A de dimension n, on appelle trace de A, et l'on note $\mathrm{tr}\, A$, la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Montrer que si A, B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. Montrer que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, M sa matrice par rapport à une base e, M' sa matrice par rapport à une base e', alors $\mathrm{tr}\, M = \mathrm{tr}\, M'$. On note $\mathrm{tr}\, f$ la valeur commune de ces quantités.
3. Montrer que si g est un autre endomorphisme de E, $\mathrm{tr}(f \circ g - g \circ f) = 0$.

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire de E dans lui-même telle que $f^2 = f$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.
2. Supposons que E soit de dimension finie n. Posons $r = \dim \mathrm{Im}\, f$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que : $f(e_i) = e_i$ si $i \leq r$ et $f(e_i) = 0$ si $i > r$. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$.