Feuille TD : Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1 (Définition et exemples). Justifier si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ pour les mêmes opérations.
3. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$.
4. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda x = x^\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
5. L'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\sin(x+y) = 0$.
6. L'ensemble des vecteurs $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1,3,-2)$.
7. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f'' + f = 0$.
8. L'ensemble des fonctions continues sur $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant $\int_0^1 f(x)\sin(x)\, dx = 0$.
9. L'ensemble des matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $a + d = 0$.

Exercice 2 (Sous-espaces vectoriels). Décider si les ensembles suivantes sont des sous-espaces vectoriels des espaces précisés :

1. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. L'ensemble des suites réelles convergentes dans l'espace vectoriel des suites réelles.
3. L'ensemble $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
4. L'ensemble $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
5. L'ensemble $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
6. L'ensemble $F_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
7. L'ensemble des fonctions paires $\mathcal{P}$ dans l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
8. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques de taille n dans l' espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (Combinaison linéaire). On considère les deux vecteurs $u = (1,2,-1)$ et $v = (6,4,2)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Le vecteur $(9,2,7)$ est-il combinaison linéaire de u et v ? Et $(4,-1,8)$?
2. Existe-t-il un nombre réel x tel que $(x,2,-3)$ est combinaison linéaire de u et v ?

Exercice 4. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On note, pour v et v' deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\langle v, v' \rangle$ leur produit scalaire.

1. Montrer que $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - 4z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $v' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(v) = \langle v, v' \rangle$ est linéaire.
3. Montrer que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v' est un sous-espace vectoriel.

Exercice 5. Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{lll} f_1 : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\ f_3 : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_4 : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\ f_5 : & \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_5(P) = (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$$

Pour les applications linéaires, déterminer Ker f_i et Im f_i. En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

Exercice 6. Soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les suites réelles.

1. Pour deux suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ et pour $t \in \mathbb{R}$, rappeler la définition des suites $u + v$ et tu.
2. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont convergentes. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sev de $\mathcal{S}$.
3. Soit $\mathcal{L}_0$ l'ensemble des suites de limite 0. Montrer que $\mathcal{L}_0$ est un sev de $\mathcal{L}$.

Exercice 7. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On fixe un entier $p \geq 1$.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^p$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ est linéaire.
2. Est-elle surjective ? Injective ? Déterminer son noyau.

Exercice 8. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $T(u)$ définie par $T(u)_n = u_{n+1}$, c.-à.-d. $T(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.
2. T est-il surjectif ? Injectif ? Déterminer son noyau.

Exercice 9. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ (par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$).
2. $(*)$ Soit $\mathcal{F} = (P_1, \dots, P_m)$ une famille de polynômes non nuls, telle que $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_m)$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Indication : si l'on a $t_1P_1 + \cdots + t_mP_m = 0$, avec $t_i \in \mathbb{K}$, montrer que $t_m = 0$, puis que $t_{m-1} = 0$, etc.
   (Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer le coefficient du polynôme de plus haut degré apparaissant dans une combinaison linéaire des P_k valant 0.)

Exercice 10. Soit F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto A\sin(x + \varphi)$, où $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que tout élément de F est une combinaison linéaire des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
2. Réciproquement, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ appartient à F. Indication : considérer $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis déterminer un φ approprié.
3. Montrer que F est un sev du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et que les fonctions cos et sin engendrent ce sous-espace.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel de dimension n et ϕ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\phi^{n-1}(x) \neq 0$.
Montrer que la famille $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.