Feuille TD : Suites numériques

Exercice 1 Déterminez les limites (si elles existent) des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes :

1. (a) $u_n = -n^3 + n^2 - 1$
   (b) $v_n = n^3 + n^2 + 1$
   (c) $s_n = u_n + v_n$
   (d) $p_n = u_n v_n$
   (e) $q_n = \frac{u_n}{v_n}$
2. (a) $u_n = n^2 - 1$
   (b) $v_n = n^3 - n^2 + \sin(n)$
   (c) $s_n = u_n + v_n$
   (d) $q_n = \frac{u_n}{v_n}$
3. (a) $u_n = \dfrac{n^3 - 5}{n^3 + 1}$
   (b) $u_n = \dfrac{2n + 8}{2n^2 + 5}$
   (c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
   (d) $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$
4. (a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
   (b) $u_n = \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 2 Étudier la suite $u_{n+1} = \ln(3 + u_n)$ avec $u_0 = 0$ et $u_0 = 5$.
Indication. Étudier d'abord la fonction $f : x \to \ln(x + 3) - x$ et montrer qu'il existe un unique $x_0 \in [0, 5]$ tel que $f(x_0) = 0$ et pour $x < x_0$, $f(x) > 0$ et pour $x > x_0$, $f(x) < 0$.

Exercice 3 Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 + 2u_n^2}$.
Indication. Montrer que (u_n) est décroissante minorée.

Exercice 4 Étudier la suite $u_{n+1} = u_n + \frac{1-u_n^2}{2u_n}$ avec $u_0 > 0$.
Indication. Montrer d'abord que $u_n > 0$ pour tout n puis étudier le signe de la fonction $f : x \to \frac{1-x^2}{2x}$ sur $[0, +\infty)$. En déduire le comportement de la suite u_n selon que $0 < u_0 < 1$, $u_0 = 1$ ou $u_0 > 1$.

Exercice 5 Montrer que une suite (u_n) à termes entiers converge si, et seulement si, elle est stationnaire.

Exercice 6 Montrer que une suite (u_n) d'entiers naturels deux à deux distincts diverge.

Exercice 7 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (u_n)$ et (v_n) deux suites telles que

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$
- $u_n + v_n \to (a + b)$

Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

Exercice 8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ convergent.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 9 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \to 0$$

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Exercice 10 Soit (u_n) une suite de réels non nuls vérifiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$.
Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 11 Déterminez les limites (si elles existent) des suites dont (u_n) suivantes:

1. $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
3. $u_n = \dfrac{n - \sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^2-1}}$
4. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$

Exercice 12 Comparer

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m, \quad \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 13 Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ. On pose $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.
a) Montrer que (v_n) est croissante.
b) Etablir que $v_{2n} \geq \frac{u_n+v_n}{2}$.
c) En déduire que $v_n \to \ell$.

Exercice 14 Donner lexpression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes:
a) (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
b) (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
c) (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 15 Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto \dfrac{x^2}{2-x^2}$.
On considére la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in [0,1[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2-u_n^2}$.

1. Montrer que, pour $x \in [0,1[$, $0 \leq f(x) \leq x < 1$.
2. En déduire que $0 \leq u_n < 1$ puis que (u_n) est décroissante.
3. La suite (u_n) a-t-elle une limite et si oui laquelle ?

Exercice 16 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$ et g la fonction $g\ :\ x \to \sin x - x$.

1. Étudier la fonction g sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq u_n \leq 1$.
3. On suppose que $0 \leq u_1 \leq 1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq 1$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq u_n$.
   (c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4. On suppose que $-1 \leq u_1 \leq 0$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 17 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+4u_n^3}$.

1. Montrer que (u_n) est décroissante minorée. Que pouvez-vous en déduire ?
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$. Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 18

1. Le taux de natalité annuel dans la ville de Paris est de 4% alors que le taux de mortalité annuel est de 5%. La population en 2000 est de 2.000.000 habitants, au bout de combien de temps cette ville n'aura-t'elle plus d'habitants ? Au bout de combien de temps la population aura-t-elle doublé si le taux de natalité annuel est de 5% alors que le taux de mortalité annuel est de 4% ?
2. On suppose de plus que chaque année, 1.000 habitants quittent la ville, reprendre les questions ci-dessus.

Exercice 19 Montrer que la suite u définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ est de Cauchy.

Exercice 20 On définit les suites S et T par $S_n = \sum_1^n \frac{1}{k(k+1)}$ et $T_n = \sum_1^n \frac{1}{k^2}$.

1. En utilisant $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, montrer que S est convergente. Notamment, elle est de Cauchy.
2. En déduire que la suite de terme général $\sum_1^n \frac{1}{k^2(k+1)}$ est de Cauchy.
3. Montrer que la suite T est convergente.