

Ecole Normale Supérieure de Rennes

MATHIEU MARI

---

# Classification des Surfaces Topologiques Compactes

---

Maître de Stage : DAVID CHATAUR

Laboratoire Paul Painlevé

Université Lille 1



*L'anneau de Möbius*, Paul Griot, Université Rennes 1.

---

Juin 2014

## 0.1 Préface

Ce mémoire est le rapport d'un stage de cinq semaines effectué au laboratoire Paul Painlevé de l'université de Lille 1. Ce laboratoire compte cinq équipes de recherche dont l'équipe *Géométrie et Topologie* dans laquelle travaille mon maître de stage David CHATAUR. Maître de conférence habilité à diriger des recherches, son domaine de recherche est la topologie algébrique. C'est un domaine qui s'attache à décrire les propriétés qualitatives d'objets géométriques via la construction d'invariants de nature algébrique (nombres, groupes, algèbres). Il s'intéresse tout particulièrement à l'étude de la topologie des variétés algébriques complexes (les solutions de systèmes d'équations polynomiales complexes), mais aussi à l'étude des espaces de chemins et de lacets.

Ce mémoire est le fruit des lectures et des recherches que j'ai effectuées durant le stage ainsi que des discussions avec David CHATAUR. Il est inspiré principalement de deux ouvrages : Massey [2] et le plus récent Gallier-Xu [3].

## 0.2 Notations

- $\mathbb{R}$  : l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{S}^2$  : La sphère unité i.e.  $\{x \in \mathbb{R}^3, |x| = 1\}$  où  $|x|$  désigne la valeur absolue de  $x$ .
- $\mathbb{T}^2$  : le tore.
- $\mathbb{RP}^2$  : le plan projectif.
- $\mathbb{K}^2$  : la bouteille de Klein.
- $E \simeq F$  :  $E$  et  $F$  sont homéomorphes.

# Table des matières

0.1	Préface . . . . .	1
0.2	Notations . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Surfaces</b>	<b>3</b>
2.1	Cadre formel . . . . .	3
2.2	Surfaces remarquables . . . . .	3
2.2.1	La sphère : $\mathbb{S}^2$ . . . . .	3
2.2.2	Le tore : $\mathbb{T}^2$ . . . . .	4
2.2.3	Le ruban de Möbius . . . . .	4
2.2.4	La bouteille de Klein : $\mathbb{K}^2$ . . . . .	4
2.2.5	Le plan projectif réel : $\mathbb{RP}^2$ . . . . .	5
2.3	Orientabilité . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Le théorème de classification des surfaces compactes</b>	<b>6</b>
3.1	Somme connexe . . . . .	6
3.2	Le théorème . . . . .	7
3.3	Phase topologique : Triangulation . . . . .	7
3.4	Phase algébrique : Complexe cellulaire . . . . .	8
3.4.1	Opération sur les complexes cellulaires . . . . .	11
3.4.2	Formes normales . . . . .	14
3.4.3	Démonstration de la version algébrique du théorème de classification	14
3.5	Classification des surfaces à bords . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Caractéristique d'Euler-Poincaré</b>	<b>18</b>
4.1	Définition et propriétés . . . . .	18
4.2	Un corrolaire du théorème de classification . . . . .	19
4.3	Formule de Gauss-Bonnet . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>22</b>

# 1 Introduction

Dans ce mémoire, je vais présenter le théorème de classification des surfaces topologiques compactes et en donner une démonstration, après avoir défini les outils nécessaires à la compréhension et à la démonstration de ce théorème.

Ce théorème est assez surprenant puisque son énoncé est relativement simple alors que sa démonstration est longue et nécessite divers outils mathématiques complexes. La première preuve rigoureuse est due à Brahma[1] en 1921. On procédera à la démonstration de ce résultat de topologie algébrique en deux phases. La première phase consiste à traduire un problème topologique (deux surfaces données sont-elles homéomorphes) en un problème algébrique via l'utilisation de complexes cellulaires, et la deuxième phase a pour but de résoudre le problème algébrique. On parlera également d'invariants topologiques, comme la caractéristique d'Euler-Poincaré qui joue un rôle essentiel dans le théorème de classification et dans son utilisation.

## 2 Surfaces

Pour pouvoir parler de classification de surfaces, il faut d'abord définir la notion de surface.

### 2.1 Cadre formel

**Définition.** On dit qu'un espace topologique séparé  $S$  est *une surface sans bord* et si tout point possède un voisinage homéomorphe au disque ouvert  $\{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 1\}$ . Si de plus  $S$  est compacte, on dira que c'est une surface *fermée*.

Dans la définition générale de surface, il n'y a pas d'hypothèses sur le fait que  $S$  soit un sous-espace d'un espace topologique (comme  $\mathbb{R}^3$  par exemple). La notion de surface fermée définie ci-dessus est à distinguer de la notion topologique. En effet tout espace topologique est à la fois fermé et ouvert. Dans le cadre de l'exposé, on ne s'intéressera qu'aux surfaces *compactes et connexes*.

Une surface est un cas particulier en dimension deux de la notion de variétés.

La condition connexe n'est pas restrictive. En effet, deux surfaces (non-connexes) sont homéomorphes si et seulement si :

1. Elles ont le même nombre de composantes connexes.
2. On peut trouver un « couplage » des composantes.

La définition précédente correspond à des surfaces sans bord, comme la sphère  $\mathbb{S}^2$  par exemple. Cependant on peut aussi considérer des surfaces à bords.

**Définition.** On dit qu'un espace topologique séparé  $S$  est *une surface à bords* si tout point possède un voisinage homéomorphe au disque ouvert ou au demi-disque  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1 \text{ et } y \geq 0\}$ .

### 2.2 Surfaces remarquables

Toutes les surfaces sont définies à homéomorphisme près. Par exemple si une surface est homéomorphe à une sphère, on dira que c'est une sphère.

#### 2.2.1 La sphère : $\mathbb{S}^2$

La sphère est une surface fermée, homéomorphe à  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

### 2.2.2 Le tore : $\mathbb{T}^2$

Le tore c'est « la croute d'un donut ».

Plus formellement on peut caractériser un tore de différentes façons :

- Dans  $\mathbb{R}^3$ , on fait tourner le cercle d'équation  $(x - 2)^2 + z^2 = 1$  autour de l'axe  $(0z)$ .
- $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , où  $\mathbb{S}^1$  désigne le cercle.
- On obtient un tore en recollant les deux bords d'un cylindre de façon « naturelle ».

Le tore est une surface fermée.

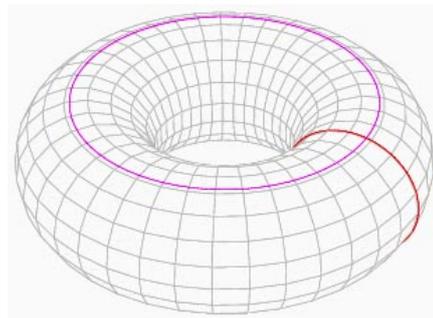


FIGURE 1 – Un tore

### 2.2.3 Le ruban de Möbius

On obtient un ruban de Möbius en recollant les deux cotés opposés d'un rectangle après avoir fait vriller la feuille d'un demi-tour.

Plus précisément, c'est le quotient du carré  $[0, 1]$  (muni de la topologie induite par la topologie naturelle de  $\mathbb{R}^2$ ) par la relation d'équivalence :  $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ . Cette surface possède des bords (un seul en réalité) et ne possède qu'une seule face. On verra que cette surface n'est pas orientable.



FIGURE 2 – Un ruban de Möbius

### 2.2.4 La bouteille de Klein : $\mathbb{K}^2$

La bouteille de Klein est une surface fermée obtenue en recollant les deux bords d'un cylindre dans « l'autre sens » par rapport au tore.

Sa visualisation n'est pas simple puisque dans l'espace, il y a auto-intersection. La bouteille de Klein ne peut pas être plongée dans  $\mathbb{R}^3$  alors qu'elle peut l'être dans  $\mathbb{R}^4$ . Ceci est analogue au fait que si on dessine un noeud sur une feuille, les traits se chevauchent alors qu'en vrai la corde ne s'auto-intersecte pas.

On peut également obtenir une bouteille de Klein en « collant » deux rubans de Möbius par leur bord.

La bouteille de Klein ne possède ni intérieur ni extérieur, et fait ainsi partie de la famille des surfaces non-orientables, puisqu'on ne peut pas dire de quel côté de la surface se trouve l'extérieur et l'intérieur.

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, le mot bouteille provient de la confusion entre les mots allemand *flasche* (bouteille) et *fläche* (surface).

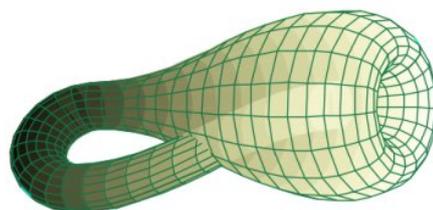


FIGURE 3 – Une bouteille de Klein



**Définition.** On dit qu'une surface  $S$  est *non-orientable* si elle contient un sous-ensemble homéomorphe au ruban de Möbius. Sinon  $S$  est *orientable*.

Par exemple, la bouteille de Klein et le plan projectif sont des surfaces non-orientables. Si une surface est orientable, on peut rendre cette surface *orientée*, en décidant en chaque point de quel côté est l'extérieur et de quel côté est l'intérieur de façon cohérente (tous les choix d'orientation sont compatibles). Il y donc deux orientations possibles pour une surface orientable. La sphère et le tore sont des exemples de surfaces orientables.

**Propriété.** *L'orientabilité est un invariant topologique. Autrement dit, si deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont homéomorphes, alors  $S_1$  est orientable si et seulement si  $S_2$  est orientable.*

*Preuve.* Soit  $h : S_1 \rightarrow S_2$  un homéomorphisme. Supposons  $S_1$  non-orientable. Alors il existe un ruban de Möbius  $M_1 \subset S_1$ .  $h(M_1)$  est un ruban de Möbius car  $M_1 \simeq h(M_1)$  et  $h(M_1) \subset S_2$  donc  $S_2$  est non-orientable.  $\square$

### 3 Le théorème de classification des surfaces compactes

Maintenant définie la notion de surfaces, nous allons présenter le théorème de classification. Pour cela, on commence par définir une « opération » sur les surfaces connexes.

#### 3.1 Somme connexe

La somme connexe est une opération sur les surfaces connexes (plus généralement sur les variétés connexes de même dimension) qui consiste à découper un disque dans une surface  $S_1$  et un autre dans une surface  $S_2$  puis recoller les deux surfaces bord-à-bord.

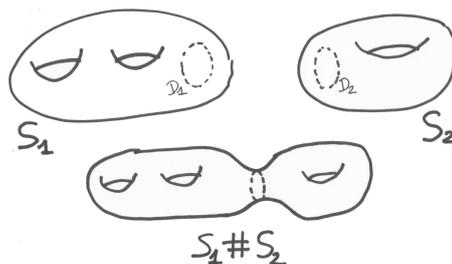


FIGURE 6 – Somme connexe de deux surfaces

**Définition-propriété.** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces connexes (éventuellement avec bords). On choisit  $P_1 \in S_1$  et  $P_2 \in S_2$  tels qu'il existe des voisinages  $D_1$  et  $D_2$  respectivement de  $P_1$  et  $P_2$ , chacun homéomorphe au disque fermé. On paramètre la frontière de  $D_1$  par l'homéomorphisme  $\gamma_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow fr(D_1)$ , respectivement  $\gamma_2$  pour  $D_2$ .

On pose alors la relation d'équivalence  $\sim$  sur  $(S_1 \setminus \overset{\circ}{D}_1) \sqcup (S_2 \setminus \overset{\circ}{D}_2)$  par :

$$\gamma_1(t) \sim \gamma_2(t), \forall t \in \mathbb{S}^1$$

La *somme connexe* de  $S_1$  et  $S_2$ , notée  $S_1 \# S_2$  est définie comme le quotient topologique de  $(S_1 \setminus \overset{\circ}{D}_1) \sqcup (S_2 \setminus \overset{\circ}{D}_2)$  par  $\sim$ .

On démontre que l'espace topologique obtenu est bien une surface et que quel que soit le choix de  $V_1, V_2, \gamma_1, \gamma_2$  on obtient toujours la même surface à homéomorphisme près. On montre que la somme connexe est associative et commutative. On montre également que si  $S_1$  et  $S_2$  sont fermées, alors  $S_1 \# S_2$  l'est aussi.

La sphère est « l'élément neutre » de cette somme, puisque pour toute surface  $S$ ,  $S \# \mathbb{S}^1$  est homéomorphe à  $S$ .

La somme connexe de deux plans projectifs est une bouteille de Klein.

## 3.2 Le théorème

Etant donné une collection de surfaces fermées connexes, on peut générer de nouvelles surfaces fermées connexes grâce à l'opération de somme connexe. On peut alors se demander s'il n'existe pas des « briques élémentaires » qui par le biais de sommes connexes génèrent l'ensemble des surfaces fermées connexes. Le théorème de classification nous le montre de la manière suivante.

**Théorème.** *Toute surface  $S$  fermée (compacte, sans bord) et connexe est homéomorphe soit :*

- à la sphère.
- à la somme connexe d'un certain nombre de tores.
- à la somme connexe d'un certain nombre de plans projectifs.

Les briques élémentaires sont donc le tore et le plan projectif. On remarque cependant que dans cette classification, il n'apparaît pas de somme connexe de plans projectifs *et* de tores. On verra plus tard que la somme connexe d'un plan projectif et d'un tore est homéomorphe à la somme connexe de trois plans projectifs.

Dans cette classification, l'ensemble des surfaces fermées connexes orientables est décrit par la sphère et l'ensemble des sommes de tores, et l'ensemble des non-orientables par les sommes connexes de plans projectifs.

Pour démontrer ce résultat, on va procéder en deux phases :

- *Une phase topologique* : On va trianguler la surface et obtenir un objet homéomorphe qui possède des faces, des arêtes et des sommets.
- *Une phase combinatoire* : On va « manipuler » cette triangulation pour la ramener à une forme normale décrivant la somme de plans projectifs ou de tores.

## 3.3 Phase topologique : Triangulation

Intuitivement, trianguler une surface revient à couvrir notre surface de pièces de puzzle obtenues en déformant des triangles.

**Définition.** Une *triangulation* d'une surface compacte  $S$  est une famille finie de fermés  $(T_i)_{i=1\dots n}$  couvrant  $S$  tel qu'il existe des homéomorphismes  $(\phi_i : T'_i \rightarrow T_i)_{i=1\dots n}$  où les  $T'_i$  sont des triangles du plan (i.e. un compact dont la frontière est l'union de trois segments). On appelle respectivement *sommet* et *arête* l'image d'un sommet et d'un côté, et par abus de langage, les  $T_i$  seront appelés *triangles*. On impose que deux triangles distincts soient disjoints, ou s'intersectent en un seul sommet ou en une unique arête.

Cette définition est relativement générale puisque l'hypothèse ici est juste compacte. Si on s'intéresse aux surfaces compactes, connexes, sans bord il faut rajouter les conditions suivantes :

- *Connexité* : Pour tout couple d'arêtes  $(a, a')$ , il existe une suite finie de triangles  $T_1, \dots, T_m$  telle que :

$$a \in T_1 \text{ et } a' \in T_m \text{ et } T_i \cap T_{i+1} \neq \emptyset, 1 \leq i < m$$

- *Sans bord* : Toute arête appartient à exactement deux triangles distincts.

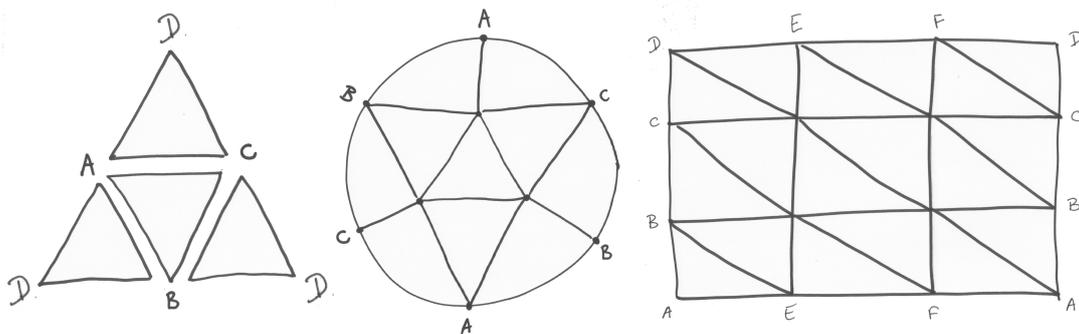


FIGURE 7 – Exemples de triangulations, dans l'ordre : la sphère, le plan projectif et le tore.

**Théorème.** *Toute surface compacte est triangulable.*

On peut trouver deux démonstrations différentes de ce théorème dans Massey[2] et Thomassen[5]. La démonstration de ce résultat nécessite entre autre le théorème de Jordan-Schonflies indiquant qu'une courbe simple fermée du plan (comme un cercle) le sépare en deux ensembles connexes : un intérieur borné et un extérieur non-borné. Ce résultat semble très élémentaire, mais sa démonstration est longue et difficile. On pourra trouver une démonstration dans Thomassen[5].

On peut généraliser la triangulation aux  $n$ -variétés où les triangles deviennent des  $n$ -simplexes. Le théorème devient faux en dimensions supérieures, par exemple il existe des 4-variétés ne possédant pas de triangulation.

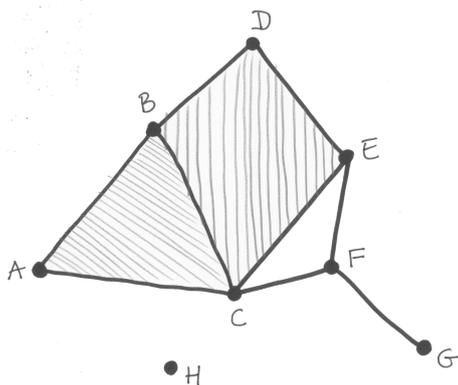
On remarque que trianguler une surface est équivalent à la « polygonaliser ». Les triangles deviennent des faces avec un nombre fini d'arêtes. Pour passer d'une triangulation à une polygonalisation on « fusionne » des triangles voisins. Pour l'inverse, pour chaque face (polygone), on relie chaque sommet avec un point à l'intérieur, et on obtient un découpage du polygone par des triangles.

Cependant, la différence notable entre les deux notions est qu'avec les polygones, on s'autorise à recoller un côté du polygone avec un autre côté de ce même polygone.

### 3.4 Phase algébrique : Complexe cellulaire

On souhaite trouver une façon de représenter une polygonalisation de manière à pouvoir mieux la manipuler. Ceci nous conduit à définir la notion de complexe cellulaire.

Un complexe cellulaire est ici défini par un ensemble de faces, un ensemble d'arêtes et un ensemble de sommets, de telle sorte que l'intersection de deux faces distinctes soit une union d'arêtes et de sommets, que l'intersection de deux arêtes disjointes soit une union d'arêtes.



Sur l'exemple, le complexe possède :

- 2 faces :  $ABC$  et  $BDEC$
- 9 arêtes :  $AB, AC, BC, BD, DE, CE, EF, CF, FG$
- 8 sommets :  $A, \dots, H$ .

FIGURE 8 – Exemple de complexe cellulaire

On va cependant utiliser une autre définition plus pratique d'un complexe cellulaire :

**Définition.** Une *cellule* ou *face* est un  $n$ -uplet ordonné que l'on notera  $a_1 a_2 \dots a_n$  où les  $a_i$  sont les *arêtes*. On notera  $a \in F$  si  $a$  est une arête de  $F$ . Un *complexe cellulaire régulier*  $C$  est une famille finie de faces. Les arêtes sont *orientées*, et si  $a$  désigne une arête, l'arête opposée sera notée  $a^{-1}$ .

Il faut bien noter que  $a^{+1}$  et  $a^{-1}$  désignent la même arête, mais avec une orientation différente. L'orientation des arêtes nous indique dans quel sens les recoller entre elles. L'orientation est très importante puisque par exemple si l'on prend un rectangle et que l'on recolle les deux côtés opposés, on n'obtient pas le même résultat selon que l'on recolle dans un sens ou dans l'autre (cylindre/ruban de Möbius). On confondra souvent une arête orientée positivement, avec le nom de l'arête ( $a^{+1} = a$ ).

Dans le cadre de notre problème, les surfaces sont connexes. On impose pour cela que si l'on sépare notre complexe cellulaire en deux ensembles de faces, alors une face du premier ensemble partage une arête avec une face du deuxième ensemble. Comme nous démontrerons le théorème de classification dans le cadre de surfaces sans bord, on impose également que chaque arête apparaisse exactement deux fois dans le complexe (il se peut qu'elle apparaisse deux fois dans la même cellule).

Exemples :

- Les complexes  $\{abc, b^{-1}e^{-1}d, a^{-1}fe, d^{-1}f^{-1}c^{-1}\}$  et  $\{aa^{-1}\}$  représentent la sphère.
- Le complexe à une face  $\{aba^{-1}b^{-1}\}$  représente le tore.
- Le complexe  $\{abcb\}$  représente le ruban de Möbius. On voit que les arêtes  $a$  et  $c$  n'apparaissent qu'une seule fois, ce sont donc des bords.
- Le plan projectif :  $\{aa\}$

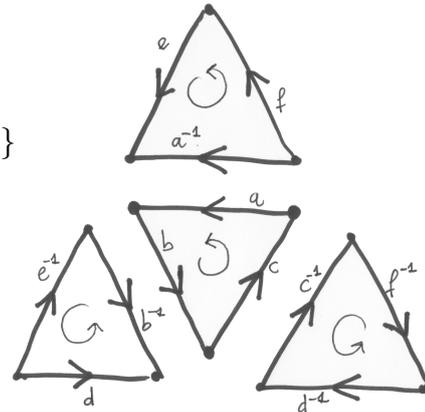


FIGURE 9 – Sphère

Pour obtenir un complexe cellulaire à partir de la triangulation d'une surface, il suffit de nommer chaque arête de la surface et lui associer un sens (l'arête  $a$  va de  $A$  à  $B$  par exemple), puis associer à chaque triangle de côtés  $a, b$  et  $c$  une cellule  $a^{\pm 1} b^{\pm 1} c^{\pm 1}$  selon l'orientation des arêtes.

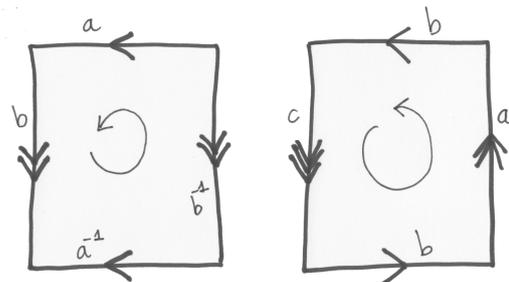


FIGURE 10 – Tore (gauche) et ruban de Möbius (droite)

Par exemple, à partir d'une triangulation de la sphère en tétraèdre :

- On choisit un nom et un sens à chaque arête.
- On découpe les triangles en gardant l'orientation des arêtes.
- A chaque triangle, on associe une cellule selon l'orientation des arêtes.

Par exemple sur la figure suivante on obtient le complexe  $\{abc, d^{-1}b^{-1}f, ef^{-1}a^{-1}, ed^{-1}c\}$  en choisissant de « lire » les arêtes dans le sens anti-horaire pour les trois premiers triangles et dans le sens horaire pour la dernière. On verra plus tard que ce choix n'importe pas.

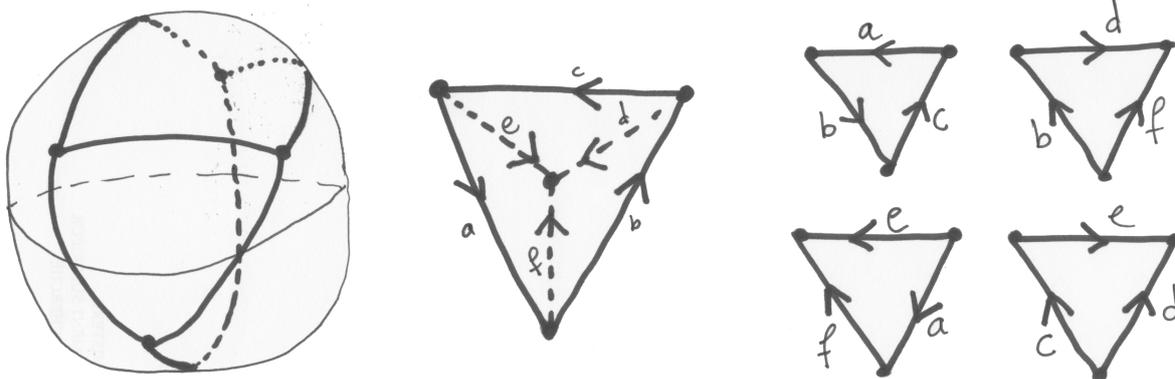


FIGURE 11 – Triangulation d'une sphère.

**Réalisation d'un complexe cellulaire** On souhaite à partir d'un complexe cellulaire  $C$  (objet algébrique), fabriquer une surface qu'on appellera *réalisation* de  $C$  (objet topologique), notée  $|C|$ .

Pour ce faire, à chaque cellule  $F = a_1^{\pm 1} \dots a_n^{\pm 1}$  de  $C$ , on associe un polygone  $P_F$  à  $n$  côtés du plan de sommets  $(A_1, \dots, A_n)$  dans cet ordre (on peut choisir une convention de toujours les ordonner dans le sens anti-horaire par exemple). L'arête  $a_i$  sera représentée par le segment  $[A_i A_{i+1}]$ . Il n'est pas contraignant de considérer des côtés « arrondis » dans le cas de cellules de la forme  $a_1 a_2$  ou  $a_1$ .

On associe alors un paramétrage continu injectif  $\gamma_{a_i} : [0, 1] \rightarrow [A_i A_{i+1}]$  de telle sorte que  $\gamma_{a_i}(0) = A_i$  et  $\gamma_{a_i}(1) = A_{i+1}$  si  $a_i$  est orientée positivement et  $\gamma_{a_i}(0) = A_{i+1}$  et  $\gamma_{a_i}(1) = A_i$  sinon.

Les polygones  $(P_F)_{F \in C}$  sont tous choisis disjoints et chacun est homéomorphe au disque fermé. On construit alors la relation  $\sim$  sur  $\bigcup_{F \in C} P_F$  de la façon suivante :

Soient  $a \in F \in C$  et  $b \in F' \in C$  et  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$  les paramétrages correspondants. Si  $a$  et  $b$  désignent la même arête, alors on pose  $\gamma_a(t) \sim \gamma_b(t), \forall t \in [0, 1]$ . On construit  $|C|$  comme étant le quotient topologique de  $\bigcup_{F \in C} P_F$  par  $\sim$ .

**Propriété 1.** *La réalisation du complexe cellulaire associée à une triangulation quelconque d'une surface compacte  $S$  est homéomorphe à  $S$ .*

*Preuve.* Lors de la triangulation d'une surface  $S$ , on construit une surjection continue  $\tau$  d'un ensemble  $T$  de triangles du plan ( $T \subset \mathbb{R}^2$ ) dans  $S$ . On peut associer de façon évidente un triangle de  $T$  à un polygone à trois côtés de la réalisation du complexe associée à la triangulation. On rajoute dans la réalisation les « conditions de recollements » par le biais d'une relation d'équivalence  $\sim$ . Il suffit donc de montrer que le quotient de  $T$  par la relation d'équivalence est bien homéomorphe à  $S$ .

On a  $\tau(p) = \tau(p')$  si et seulement  $p \sim p'$ . Ainsi,  $\tau$  est constante sur chaque classe d'équivalence ce qui nous autorise à définir  $\bar{\tau} : T_{/\sim} \rightarrow S$  tel que  $\bar{\tau}(\bar{p}) = \tau(p)$  où  $\bar{p}$  désigne la classe de  $p$ . Cette fonction est injective (car  $\tau(p) = \tau(p')$  si et seulement  $p \sim p'$ ), surjective (car  $\tau$  l'est) et continue. C'est donc une bijection continue. Or  $T_{/\sim}$  est compacte donc  $\bar{\tau}$  est un homéomorphisme.  $\square$

**Définition.** On dira que deux complexes cellulaires sont *équivalents* si leurs réalisations sont homéomorphes. On définit là une relation d'équivalence que l'on notera  $\sim$ .

Cette propriété découle directement du fait que la relation d'homéomorphie entre espaces topologiques est une relation d'équivalence.

On a réussi à transformer un problème topologique (deux espaces topologiques sont-ils homéomorphes ?) en un problème plus algébrique (deux complexes cellulaires sont-ils équivalents ?). On va alors identifier les transformations sur les complexes cellulaires qui conservent l'équivalence, puis exhiber des représentants de chaque classe d'équivalence que l'on appellera *formes normales* en utilisant ces « opérations algébriques ». Enfin, on va montrer que ces formes normales sont les complexes associés à une certaine triangulation d'une sphère, d'une somme connexe de tores ou d'une somme connexe de plans projectifs.

### 3.4.1 Opération sur les complexes cellulaires

On cherche ici à déterminer des transformations de complexes qui ne modifient pas la structure topologique associée. Par exemple, renommer les arêtes est autorisé, à condition bien sûr de ne pas renommer une arête avec le nom d'une arête déjà existante.

Si  $F = a_1 a_2 \dots a_n$  est une face, la face opposée sera  $F^{-1} = a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$ . La transformation  $F \rightarrow F^{-1}$  sera appelée *retournement*.

La transformation qui consiste à transformer la face  $a_1 \dots a_n$  en  $a_i \dots a_n a_1 \dots a_{i-1}$  sera appelée *rotation*.

Il est facile de voir que un complexe  $C'$  obtenu à partir d'une rotation ou d'un retournement d'une face d'un complexe  $C$  est équivalent à  $C$ . Pour la rotation, c'est évident car un polygone n'a pas de « sommet de départ » et pour le retournement il suffit de changer l'orientation du polygone, mais les paramétrages  $\gamma$  vérifieront exactement les mêmes propriétés.

**Définition-propriété.** Soit  $C$  un complexe cellulaire.

- $F = a_1 \dots a_n$  une cellule de  $C$ . A partir de  $F$  on crée deux cellules  $F'_1 = a_1 \dots a_i b$  et  $F'_2 = b^{-1} a_{i+1} \dots a_n$ , où  $b$  est une nouvelle arête n'apparaissant pas dans  $C$ . On obtient alors un nouveau complexe  $C' = (C \setminus F) \cup \{F'_1, F'_2\}$  équivalent à  $C$ . On dira que  $C'$  a été obtenu à partir de  $C$  par *découpage*.

L'opération inverse qu'on appellera *collage* consiste à « fusionner » les deux cellules  $a_1 \dots a_i b$  et  $b^{-1} a_{i+1} \dots a_n$  en la cellule  $a_1 \dots a_i a_{i+1} a_n$ .

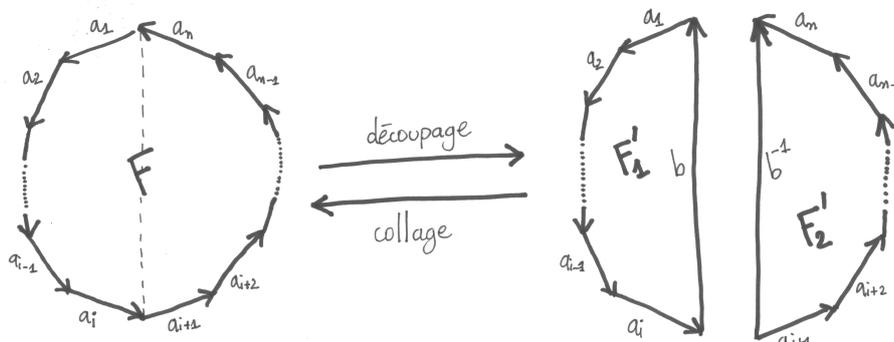


FIGURE 12 – Opération de découpage/collage

- Si  $a$  est une arête de  $C$ , l'opération de remplacer les occurrences de  $a^{+1}$  par deux arêtes consécutives  $bc$  et  $a^{-1}$  par  $c^{-1}b^{-1}$  où  $b$  et  $c$  n'apparaissent pas dans  $C$  s'appelle une *extension*. La transformation inverse est une *contraction*.

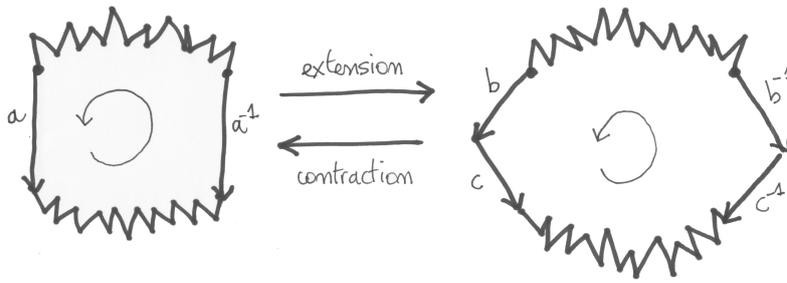


FIGURE 13 – Opération d'extension/contraction

**Propriété.** Si  $C'$  est un complexe obtenu par découpage ou extension à partir d'un complexe  $C$  alors  $C$  et  $C'$  sont équivalents.

*Preuve.* Pour le découpage, la démonstration de cette proposition est quasi-identique à celle de la proposition 1.

Pour l'extension, on montre que transformer une arc  $\gamma$  et deux arcs  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  tels que :  $\gamma_1(0) = \gamma(0)$ ,  $\gamma_2(1) = \gamma(1)$  et  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$  ne « change rien » lorsque l'on passe au quotient.  $\square$

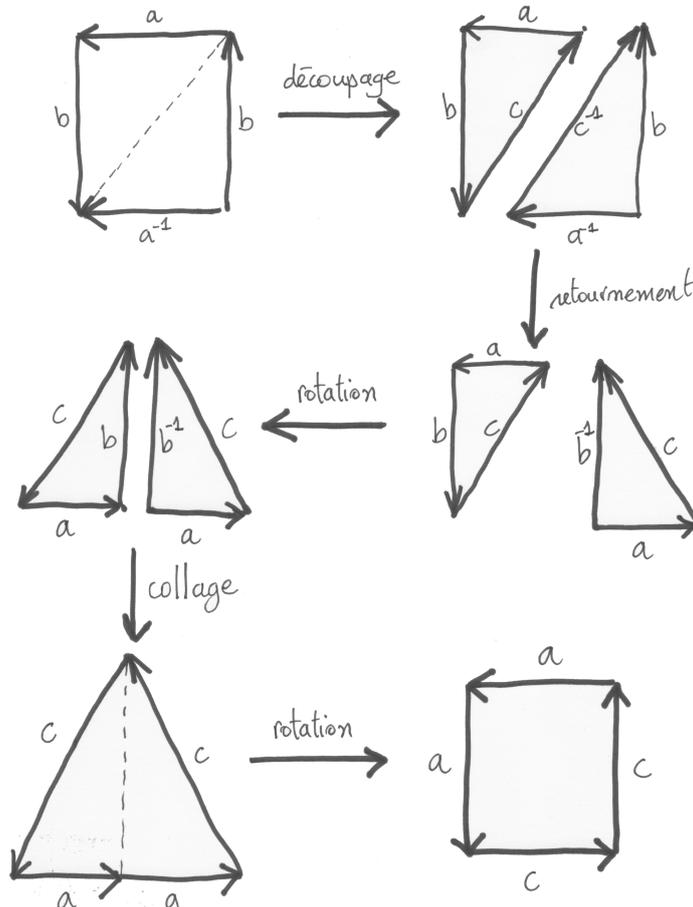
Une conséquence immédiate est que si  $C'$  est obtenu par collage ou par contraction à partir de  $C$ , alors  $C \sim C'$ .

**Définition-propriété.** Un complexe  $C'$  est une *dérivation* de  $C$  si  $C'$  est obtenu à partir de  $C$  après une succession finie de retournements, rotations, découpages, collages, extensions et contractions. On a alors  $C' \sim C$ .

*Preuve.* C'est une simple conséquence de l'associativité de  $\sim$ .  $\square$

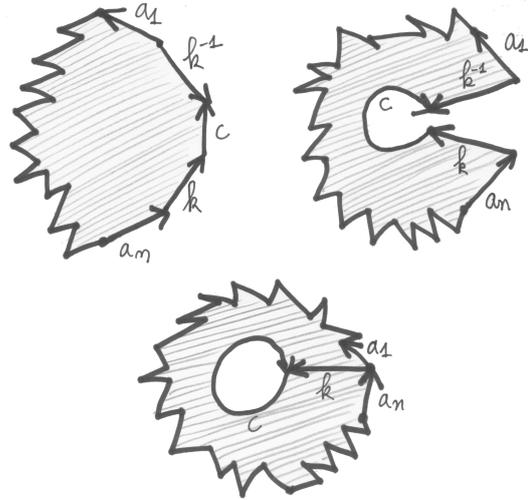
Exemple de dérivation :  $\{aba^{-1}b\} \sim \{aacc\}$ .

$\{aba^{-1}b\} \sim \{abc, c^{-1}a^{-1}b\}$  (découpage)  $\sim \{abc, b^{-1}ac\}$  (retournement)  
 $\sim \{cab, b^{-1}ac\}$  (rotation)  $\sim \{caac\}$  (collage)  $\sim \{aacc\}$  (rotation)



Comment s'effectue algébriquement une somme connexe? C'est-à-dire, comment à partir de deux complexes peut-on obtenir grâce à un « algorithme » un troisième complexe dont la réalisation est homéomorphe à la somme connexe des réalisations des deux premiers complexes?

Faire une somme connexe entre deux complexes  $C_1$  et  $C_2$  s'effectue en plusieurs étapes :

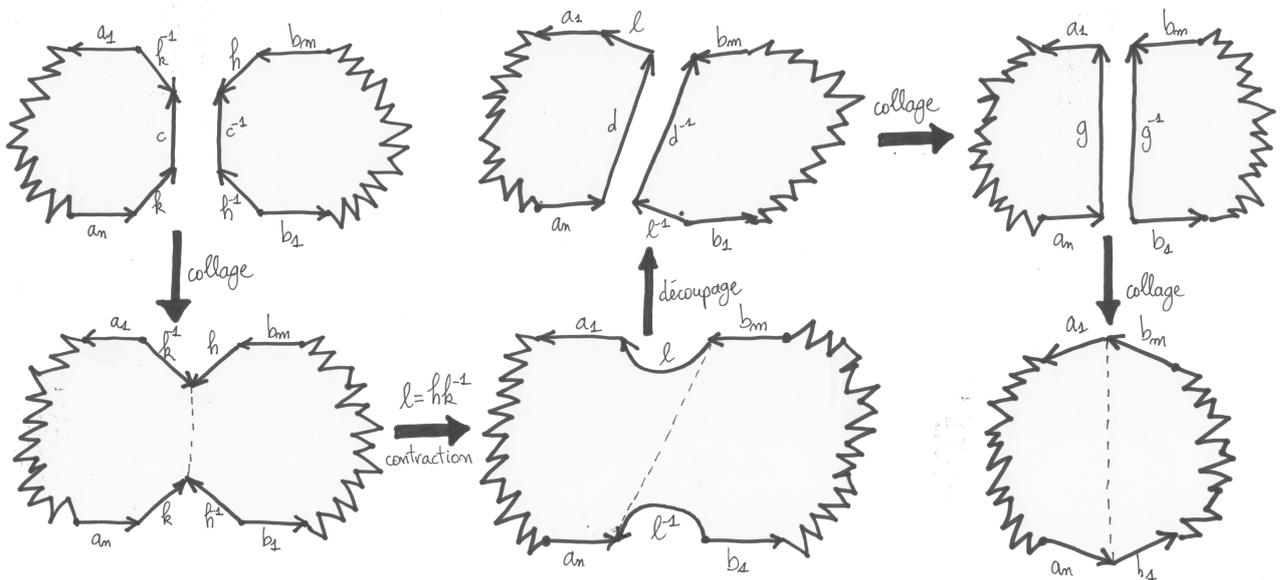


**Découper un disque dans chaque surface :** Le schéma ci-contre justifie que « faire un trou » dans une face  $F = a_1 \dots a_n$  de  $C_1$  revient à concaténer la chaîne avec  $kck^{-1}$  pour obtenir une nouvelle face  $a_1 \dots a_n kck^{-1}$ . On fait pareil avec  $C_2$  pour obtenir la face  $b_1 \dots b_m h d h^{-1}$ .

**Recoller les cercles entre eux :** Pour recoller les cercles formés dans les deux surfaces, il suffit d'identifier  $c$  avec  $d$ ! Mais dans quel sens recoller? Faut-il décider que  $d = c$  ou  $d = c^{-1}$ ? Ces deux choix sont en fait équivalents, puisque le retournement d'une cellule « transporte l'équivalence ».

On crée le complexe  $C_{\#}$  contenant les faces  $a_1 \dots a_n kck^{-1}$  et  $b_1 \dots b_m hc^{-1}h^{-1}$ , ainsi que le reste des cellules de  $C_1$  et  $C_2$ , en considérant que  $C_1$  et  $C_2$  n'ont aucune arête en commun.

**Simplification :** Intéressons-nous aux faces  $a_1 \dots a_n kck^{-1}$  et  $b_1 \dots b_m hc^{-1}h^{-1}$ . Les schémas ci-dessous indiquent comment obtenir par dérivation la cellule  $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$ .



La somme connexe est donc une opération assez « simple » algébriquement. En particulier, si on considère deux complexes à une face  $\{a_1 \dots a_n\}$  et  $\{b_1 \dots a_m\}$ , faire leur somme connexe revient à les concaténer pour obtenir le complexe à une cellule  $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$ .

On a démontré précédemment que  $\{aba^{-1}b\} \sim \{aacc\}$ . En réalité nous avons démontré un résultat énoncé dans la première partie : La somme connexe de deux plans projectifs est homéomorphe à une bouteille de Klein!

### 3.4.2 Formes normales

**Définition.** On appelle *formes normales* les complexes à une cellule (que l'on notera par abus sans crochets) qui sont de l'une des trois formes suivantes :

- (I)  $C = aa^{-1}$  - La sphère
- (II)  $C = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ ,  $n \geq 1$  - Somme connexe de  $n$  tores
- (III)  $C = a_1a_1a_2a_2 \dots a_na_n$  - somme connexe de  $n$  plans projectifs

Rappelons l'énoncé du théorème de classification : Toute surface fermée connexe est homéomorphe soit à une sphère, soit à une somme connexe de tore, soit à une somme connexe de plans projectifs.

Grâce à ce qui précède, on peut reformuler ce théorème en termes de complexes : Soit un complexe cellulaire  $C$  tel que :

- Si l'on sépare notre complexe cellulaire en deux ensembles de faces, alors une face du premier ensemble partage une arête avec une face du deuxième ensemble. (condition de connexité)
  - Chaque arête apparaît exactement deux fois. (condition de bord vide)
- Alors  $C$  est équivalent à une des formes normales décrites ci-dessus.

### 3.4.3 Démonstration de la version algébrique du théorème de classification

**Etape 1 : Se ramener à un complexe à une cellule.** Soit un  $C = \{F_1, \dots, F_n\}$  un complexe cellulaire. On va montrer que  $C$  est équivalent à un complexe à une seule cellule.

Il suffit de montrer que pour  $n \geq 2$ , un complexe à  $n$  faces est équivalent à un complexe à  $n - 1$  faces. D'après la condition de connexité, il existe  $a \in F_n$  tel qu'il existe  $i \leq n - 1$  tel que  $a \in F_i$ . On effectue un retournement de  $F_i$  si l'orientation de  $a$  est la même dans les deux arêtes puis en utilisant des rotations puis un collage, on obtient à partir de  $F_n$  et  $F_i$  une seule cellule. On arrive comme cela à construire un complexe à  $n - 1$  faces équivalent à  $C$ . La principe de récurrence nous fournit finalement un complexe à une face.

Lorsque les complexes n'ont qu'une seule face, on s'autorise l'abus d'enlever les crochets.

**Etape 2 : Elimination des motifs  $aa^{-1}$ .** On va montrer que  $aa^{-1}X \sim X$  où  $X$  est non vide.

$$aa^{-1}X \sim \{ad, d^{-1}a^{-1}X\} \sim \{b, b^{-1}X\} \sim X.$$

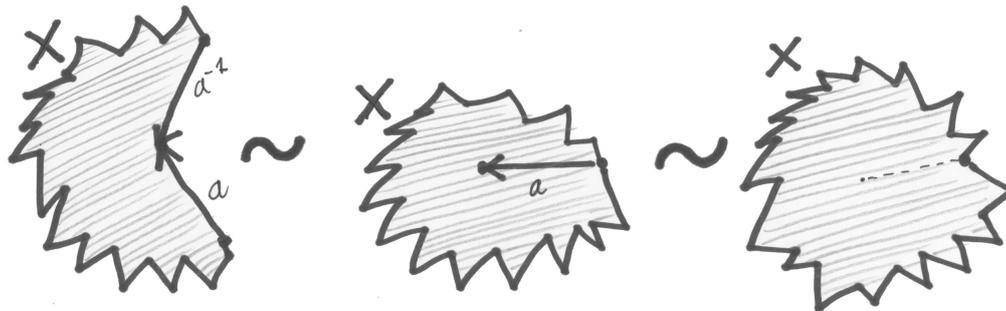


FIGURE 14 – Elimination du motif  $aa^{-1}$

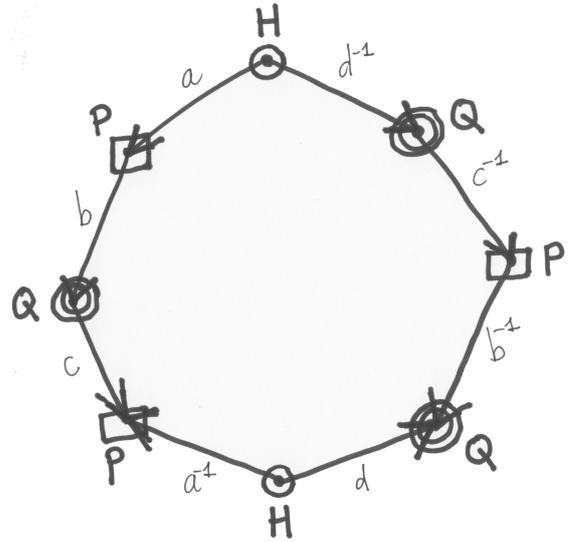
Exemple :  $abb^{-1}ckkdd^{-1}egh^{-1}he^{-1}g^{-1}c^{-1}a^{-1} \sim kkege^{-1}g^{-1}$ .

**Étape 3 : Se ramener à un complexe à un seul sommet.** Dans la définition d'un complexe, on ne décrit pas clairement la notion de sommet. Intuitivement, un sommet est un « bout » d'une arête. On peut définir deux sommets à partir d'une arête orientée : le sommet *source* et le sommet *cible*. Ils représentent chacun des deux bouts d'une arête (ils peuvent être égaux).

Si  $P$  est le sommet cible de  $a$  alors  $c$ 'est également le sommet source de  $a^{-1}$ .

On définit une relation d'équivalence sur les arêtes orientées :  $a$  et  $a'$  sont équivalentes si elles ont le même sommet cible.

Si on prend une face  $a_1 \dots a_n$ , le sommet cible de  $a_i$  est également le sommet source de  $a_{i+1}$ . On en déduit que  $a_i$  et  $a_{i+1}$  sont équivalents. On fabrique ainsi les classes d'équivalences (sommet).

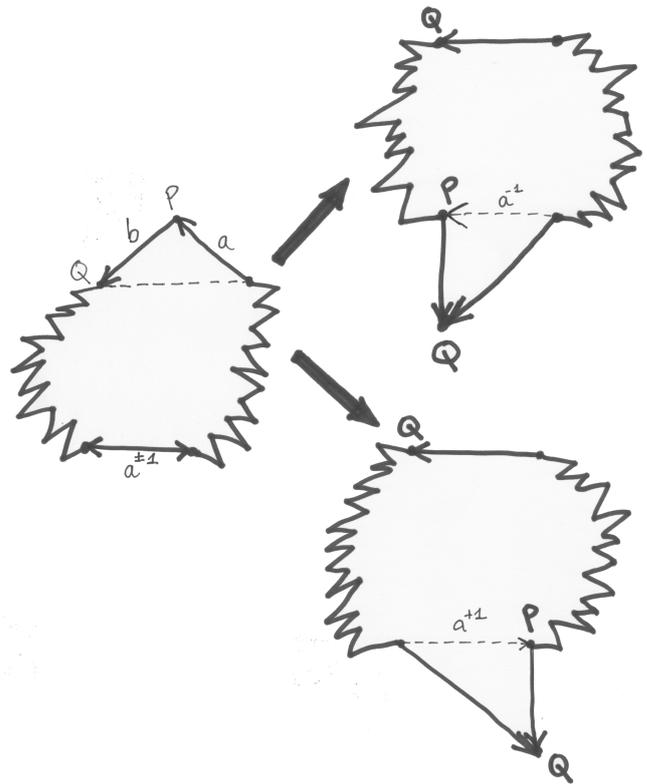


Exemple : Le complexe  $abca^{-1}db^{-1}c^{-1}d^{-1}$  a trois sommets :  $P = (a, b^{-1}, c)$ ,  $Q = (b, c^{-1}, d)$  et  $H = (a^{-1}, d^{-1})$ .

Montrons alors que tout complexe est équivalent à un complexe à un seul sommet.

Il suffit de montrer que si un complexe a plus de deux sommets alors on peut toujours en enlever un.

Soit  $P$  un sommet quelconque que l'on veut enlever. Comme on suppose qu'il y a plus de deux sommets, il existe une arête  $b$  (orientée) ayant comme source  $P$  et comme cible  $Q \neq P$ . Supposons qu'il y ait un deuxième représentant du sommet  $P$ . On effectue la dérivation (découpage, rotation, collage) comme illustré ci-contre (si les deux orientations de  $a$  sont identiques, on effectue un retournement en plus).



On remarque que l'on a enlevé un représentant de la  $P$  et rajouté un représentant de  $Q$ .

On effectue cette stratégie jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul représentant de  $P$ . **FIGURE 15 – Réduction du sommet  $P$**

S'il n'y a plus qu'un représentant de  $P$  alors il est de la forme  $P = (a)$ , alors quitte à effectuer un retournement ou/et une rotation, la cellule est de la forme  $aa^{-1}X$ . On peut alors éliminer le dernier représentant de  $P$  (cf. Étape 2).

On élimine finalement tous les sommets jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un seul.

**Etape 4 : Création des *cross-cap*.** Soit  $a_1 \dots a_n$  un complexe à une face. D'après la condition de bords vides, il existe  $i \geq 2$  tel que  $a_i = a_1^{\pm 1}$ .

On dira que  $(a_1, a_i)$  est un couple de la *première espèce* s'ils ont la même orientation, sinon c'est un couple de la *deuxième espèce*.

Montrons que  $aXaY \sim bbY^{-1}X$  :

$$aXaY \sim \{aXb, b^{-1}aY\} \sim \{aXb, bY^{-1}a^{-1}\} \sim bY^{-1}Xb \sim bbY^{-1}X.$$

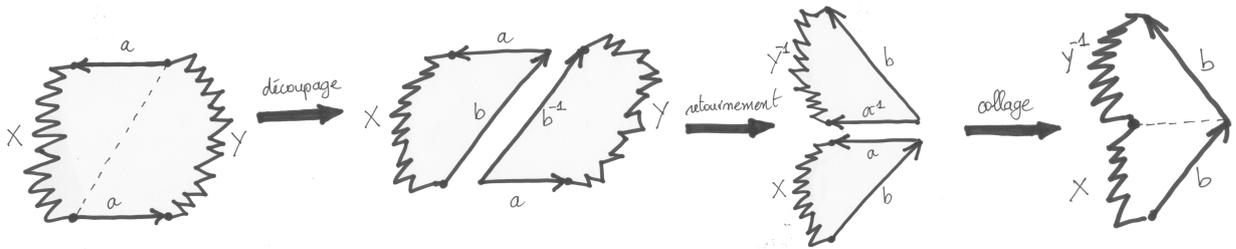


FIGURE 16 –  $aXaY \sim bbY^{-1}X$  : Création d'une *cross-cap*

Cette dérivation nous permet de fabriquer le motif  $aa$ , l'une des briques élémentaires : une *cross-cap*.

On considère un complexe  $C$  à une seule face et un seul sommet. Tant que  $C$  possède des couples de la première espèce dont les deux représentants ne sont pas voisins dans l'écriture de  $C$ , on effectue la dérivation précédente.

Si la cellule obtenue est de la forme  $a_1a_1 \dots a_na_n$ , alors la cellule est dans la forme normale (II). Sinon, on passe alors à l'étape 5.

**Etape 5 : Création des *anses*.** On désigne par *anse* le fragment de cellule de la forme  $aba^{-1}b^{-1}$ . Le terme anse provient du fait qu'une cellule de la forme  $aba^{-1}b^{-1}X$  représente la somme connexe de la réalisation de  $X$  avec un tore, ce qui revient à « ajouter une anse » à  $|X|$ .

On a :  $aUVa^{-1}X \sim bVUb^{-1}X$ .

$$aUVa^{-1}X \sim \{aUb^{-1}, bVa^{-1}X\} \sim \{aUb^{-1}, XbVa^{-1}\} \sim XbVUb^{-1} \sim bVUb^{-1}X.$$

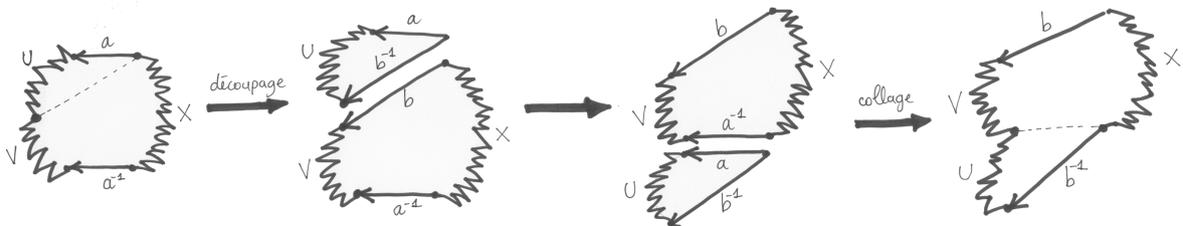


FIGURE 17 –  $aUVa^{-1}X \sim bVUb^{-1}X$

Quitte à renommer  $a$ , on peut écrire  $aUVa^{-1}X \sim aVUa^{-1}X$ .

Maintenant, montrons que  $aUbVa^{-1}Wb^{-1}X \sim aba^{-1}b^{-1}XWVU$  :

$$\begin{aligned}
a(U)(bV)a^{-1}(Wb^{-1}X) &\sim abVUa^{-1}Wb^{-1}X \\
&\sim b(VU)(a^{-1}W)b^{-1}(Xa) \\
&\sim ba^{-1}WVUb^{-1}Xa \\
&\sim a^{-1}(WVU)(b^{-1}X)ab \\
&\sim a^{-1}b^{-1}XWVUab \\
&\sim aba^{-1}b^{-1}XWVU
\end{aligned}$$

Arrivé à l'étape 5, les couples de la première espèce sont regroupés par paires. On s'occupe dans cette étape des couples de la deuxième espèce.

Soit un  $(a, a^{-1})$  un couple de la deuxième espèce de  $C$  tel que  $C = aXa^{-1}Y$ . Si  $X$  ou  $Y$  est vide alors on utilise l'étape 2 pour éliminer  $aa^{-1}$  (sauf si  $X$  et  $Y$  sont vides auquel cas on est sous la forme normale (I) ). Sinon il existe un couple de la deuxième espèce  $(b, b^{-1})$  tel que  $b \in X$  et  $b^{-1} \in Y$ . Ceci découle du fait que  $C$  est un complexe à un seul sommet. En effet, si la source et la cible de  $a$  sont égaux, alors il existe un couple  $(b, b^{\pm 1})$  tel que  $b \in X$  et  $b^{-1} \in Y$ . Or ce couple est par hypothèse de la deuxième espèce.  $C$  est donc de la forme  $aX_1bX_2a^{-1}Y_1b^{-1}Y_2$ .

On utilise la dérivation précédente et on obtient  $aba^{-1}b^{-1}Y_2Y_1X_2X_1$ . Comme il n'y a pas de retournement, aucun couple de la première espèce n'est formé par cette dérivation. On itère jusqu'à ce que tous les couples de la deuxième espèce soient sous la forme de anses.

Si au début de l'étape 4 il n'y a que des couples de la deuxième espèce, alors la cellule obtenue à la fin de l'étape 5 est sous la forme normale (III).

Sinon, la cellule est une concaténation de cross-cap de anses.

### Etape 5 : Transformation des anses.

**Lemme.** *La somme connexe d'un plan projectif et d'un tore est homéomorphe à la somme connexe de trois plans projectifs.*

$$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$$

*Démonstration.* Pour démontrer que la somme d'un plan projectif avec un tore est homéomorphe à la somme de trois plans projectifs, on va montrer que  $aabc b^{-1}c^{-1}X \sim aaccbbX$  en utilisant la dérivation :  $aaXY \sim aYaX^{-1}$ .

$$\begin{aligned}
aa(bc)(b^{-1}c^{-1}X) &\sim a(b^{-1}c^{-1}X)a(c^{-1}b^{-1}) \sim b^{-1}(c^{-1}Xac^{-1})b^{-1}a \\
&\sim b^{-1}b^{-1}a^{-1}c^{-1}Xac^{-1} \sim c^{-1}(Xa)c^{-1}(b^{-1}b^{-1}a^{-1}) \\
&\sim c^{-1}c^{-1}(abb)(Xa) \sim a(bbX)a(c^{-1}c^{-1}) \\
&\sim aaccbbX
\end{aligned}$$

□

Ainsi, il suffit qu'il y ait un seul cross-cap pour transformer toutes les anses en cross-caps. Une fois que toutes les anses ont disparu, on obtient une cellule sous la forme normale (III).

Ceci achève la démonstration du théorème de classification.

### 3.5 Classification des surfaces à bords

Comment généraliser le théorème de classification aux surfaces compactes connexes *avec bords* ?

On a déjà vu que « faire un trou » dans un complexe correspondait à rajouter le motif  $hch^{-1}$  à une face, où  $h$  et  $c$  n'apparaissent pas dans le complexe.

Il existe également des formes normales pour les complexes dont la réalisation possède des bords, qui paraissent naturelles avec la remarque précédente :

- (I')  $C = aa^{-1}h_1c_1h_1^{-1} \dots h_m c_m h_m^{-1}$  - La sphère à  $m$  bords.
- (II')  $C = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}h_1c_1h_1^{-1} \dots h_m c_m h_m^{-1}$ ,  $n \geq 1$  - Somme connexe de  $n$  tores avec  $m$  bords.
- (III')  $C = a_1a_1a_2a_2 \dots a_na_nh_1c_1h_1^{-1} \dots h_m c_m h_m^{-1}$  - somme connexe de  $n$  plans projectifs avec  $m$  bords.

On peut montrer que tous les complexes de réalisation compacte connexe (avec ou sans bords) sont équivalents à une des formes normales au dessus. La démonstration est très similaire, il faut tout de même :

- Effectuer une étape 3-bis consistant à se ramener à un complexe à 1 sommet interne, et  $m$  sommets de bords, si  $m$  est le nombre de bords. Ceci conduit à créer les motifs  $h_i c_i h_i^{-1}$  dans la cellule.
- Regrouper les motifs  $h_i c_i h_i^{-1}$  ensemble. En utilisant la dérivation  $aUVa^{-1}X \sim aVUa^{-1}X$ , on montre que :

$$hch^{-1}Xkdk^{-1}Y \sim h^{-1}(X)(kdk^{-1}Y)hc \sim h^{-1}kdk^{-1}YXhc \sim hch^{-1}kdk^{-1}YX$$

## 4 Caractéristique d'Euler-Poincaré

### 4.1 Définition et propriétés

**Définition.** On considère un polyèdre et on note respectivement  $F, A$  et  $S$  son nombre de faces, d'arêtes et de sommets. On définit la *caractéristique d'Euler-Poincaré* du polyèdre, notée généralement  $\chi$  comme  $\chi = F - A + S$ .

Remarque : Il peut y avoir différentes définitions de la caractéristique d'Euler-Poincaré et celle ci-dessus est originellement appelée caractéristique d'Euler.

On peut étendre cette définition aux complexes cellulaires. Les complexes sous forme normale ont *une* face et *un* sommet. On peut facilement calculer leur caractéristique d'Euler-Poincaré.

Exemples :

- cube :  $\chi = 6 - 12 + 8 = 2$
- tétraèdre :  $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$
- $\chi(aa^{-1}) = 1 - 1 + 2 = 2$ .
- $\chi(a_1a_1 \dots a_na_n) = 1 - n + 1 = 2 - n$
- $\chi(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}) = 1 - 2n + 1 = 2 - 2n$

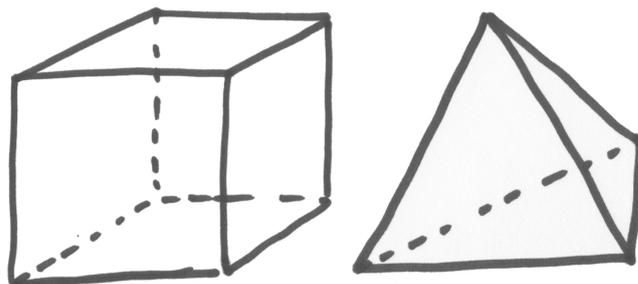


FIGURE 18 – Un cube et un tétraèdre

**Propriété.** La caractéristique d'Euler-Poincaré est un invariant topologique. Autrement dit, si  $C_1$  et  $C_2$  sont tels que  $|C_1| \simeq |C_2|$ , alors  $\chi(C_1) = \chi(C_2)$ .

*Preuve.* On va montrer que  $C_1 \sim C_2 \Rightarrow \chi(C_1) = \chi(C_2)$ .

Il suffit de montrer que les rotations, retournements, collages, découpages, extensions et contractions laissent invariant la caractéristique d'Euler-Poincaré.

- Pour les rotations et retournement c'est évident car  $F$ ,  $A$  et  $S$  ne sont pas modifiés.
- Un découpage rajoute exactement une arête et une face.  $\tilde{\chi} = (F + 1) - (A + 1) + S = \chi + 1 - 1 = \chi$ .  $\chi$  est donc invariant par découpage et par conséquent également par collage.
- Une extension rajoute exactement une arête et un sommet, donc ne modifie pas  $\chi$ , tout comme l'opération inverse, la contraction.

□

Quelle que soit la façon de trianguler une surface compacte donnée, on obtient donc toujours la même caractéristique d'Euler-Poincaré.  $\chi$  est donc une caractéristique intrinsèque à une surface. Ceci permet d'étendre sa définition à l'espace des surfaces compactes. On peut donc écrire  $\chi(S)$  où  $S$  est une surface compacte.

**Théorème (Descartes-Euler).** Pour un polyèdre convexe, on a  $F - A + S = 2$

*Démonstration.* C'est immédiat puisque un polyèdre convexe est homéomorphe à la sphère et que la sphère a une caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 2. □

## 4.2 Un corrolaire du théorème de classification

**Propriété.** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces compactes. Alors  $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$ .

*Preuve.* Soient  $C_1 = \{F_1, \dots, F_n\}$  un complexe de réalisation homéomorphe à  $S_1$  et  $C_2 = \{F'_1, \dots, F'_m\}$  un complexe de réalisation homéomorphe à  $S_2$ .

Le complexe  $C = \{F_1, \dots, F_n h d h^{-1}, k d k^{-1} F'_1, \dots, F'_m\}$  a une réalisation homéomorphe à  $S_1 \# S_2$ .

En notant  $f(K)$ ,  $a(K)$  et  $s(K)$  respectivement le nombre de faces, d'arêtes et de sommets d'un complexe  $K$  on a :

- $f(C) = n + m = f(C_1) + f(C_2)$
- $a(C) = a(C_1) + a(C_2) + 3$ . On a rajouté les arêtes  $h$ ,  $k$  et  $d$ .
- $s(C) = s(C_1) + s(C_2) + 1$ . On a rajouté le sommet  $(h, d, d^{-1}, k)$ .

Au final,  $\chi(C) = \chi(C_1) + \chi(C_2) + 0 - 3 + 1 = \chi(C_1) + \chi(C_2) - 2$ . □

Rajouter un bord à une surface (*i.e.* enlever une surface homéomorphe à un disque ouvert), revient à concaténer une des faces du complexe  $C = \{F_1, \dots, F_n\}$  correspondant pour obtenir par exemple le complexe  $C' = \{F_1 h c h^{-1}, \dots, F_n\}$ .  $C'$  a le même nombre de faces que  $C$ , deux arêtes en plus ( $h$  et  $c$ ) et un sommet en plus ( $h, c, c^{-1}$ ). On peut conclure en disant que rajouter un bord diminue de un la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface.

- Si  $S$  est une sphère avec  $m$  bords, sa caractéristique d'Euler-Poincaré est  $2 - m$ .
- Si  $S$  est une somme connexe de  $n$  tore avec  $m$  bords, sa caractéristique d'Euler-Poincaré est  $2 - 2n - m$ .
- Si  $S$  est une somme connexe de  $n$  plans projectifs avec  $m$  bords, sa caractéristique d'Euler-Poincaré est  $2 - n - m$ .

On voit que si une surface a une caractéristique d'Euler-Poincaré paire, alors elle peut être la somme de tores ou de plans projectifs. On peut alors distinguer les deux cas par leur orientabilité. On peut énoncer un corollaire du théorème de classification.

**Corollaire (Théorème de classification).** *Deux surfaces compactes connexes sont homéomorphes si et seulement si elles ont même orientabilité, même caractéristique d'Euler-Poincaré, et même nombre de bords.*

*Démonstration.* On a déjà montré que si deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont homéomorphes, alors  $S_1$  est orientable si et seulement si  $S_2$  est orientable et les deux surfaces ont même caractéristique d'Euler-Poincaré.

Par hypothèse, il existe un homéomorphisme  $h : S_1 \rightarrow S_2$ . Si on restreint  $h$  à la frontière de  $S_1$ , on définit un homéomorphisme de  $fr(S_1)$  sur son image, qui est la frontière de  $S_2$ . Le nombre de composantes connexes étant conservé par homéomorphisme, les deux frontières ont même nombre de composantes connexes, c'est-à-dire même nombre de bords.

*Réciproquement*, soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces compactes connexes qui ont même orientabilité, même caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi$  et même nombre de bords  $m$ .

Supposons que  $\chi + m$  soit impair. Alors d'après le théorème de classification, il n'y a qu'une seule surface (à homéomorphisme près) ayant  $m$  bords et une caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi$ , c'est la somme connexe de  $n = 2 - \chi - m$  plans projectifs avec  $m$  bords. Donc  $S_1$  et  $S_2$  sont homéomorphes par transitivité.

Si  $\chi + m$  est pair, soit  $\chi + m = 2$  auquel cas les deux surfaces sont des sphères à  $m$  bords. Sinon  $\chi + m \leq 0$  et il y a deux surfaces correspondantes : la somme de  $n = 2 - \chi - m$  plans projectifs (avec  $m$  bords) ou la somme de  $\frac{2-\chi-m}{2}$  tores (avec  $m$  bords). Comme  $S_1$  et  $S_2$  ont même orientabilité, ils sont homéomorphes, puisqu'une somme de tores est orientable et une somme de plans projectifs ne l'est pas.  $\square$

On souhaite dire si deux surfaces compactes connexes quelconques sont homéomorphes. En utilisant le théorème de classification, il faut trianguler les deux surfaces, fabriquer les complexes correspondants, puis les mettre sous forme normale.

Avec le corollaire précédent, il nous suffit de décider de leur orientabilité et calculer leur nombre de bords et leur caractéristique d'Euler-Poincaré. L'avantage supplémentaire est que la première version du théorème nécessite de trianguler une surface compacte, et il n'existe pas d'algorithme général permettant de trianguler une surface compacte quelconque.

A l'inverse, on peut décider de l'orientabilité, du nombre de bords et même de la caractéristique d'Euler-Poincaré (section suivante) d'une surface compacte sans avoir à la trianguler.

### 4.3 Formule de Gauss-Bonnet

Sous certaines conditions, on peut calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface grâce à la formule de Gauss-Bonnet.

Dans cette section on suppose que les surfaces considérées sont orientables, différentiables ( $C^\infty$ ), et plongées dans  $\mathbb{R}^3$ .

Il suffit en réalité que la surface soit  $C^2$ , mais la condition  $C^\infty$  reste générale puisque d'après un théorème de Hassler Whitney, toute surface  $C^k$  peut être « lissée » (il existe un difféomorphisme) en une surface  $C^\infty$ .

**Définition.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface orientée et différentiable. On définit l'*application de Gauss* notée  $\Gamma$  de  $S$  à valeur dans la sphère  $\mathbb{S}^2$  qui à un point  $P$  associe le vecteur unitaire normal à  $S$  conformément à l'orientation de  $S$ .

Comme  $S$  et  $\mathbb{S}^2$  sont tous deux plongés dans  $\mathbb{R}^3$ , et que le plan tangent à  $S$  en  $P$  est parallèle au plan tangent à  $\mathbb{S}^2$  en  $\Gamma(P)$ , on peut identifier les deux plans.  $T_P S = T_{\Gamma(P)} \mathbb{S}^2$ .

La différentielle en  $P$  de l'application de Gauss :  $d\Gamma_P : T_P S \rightarrow T_{\Gamma(P)} \mathbb{S}^2$  peut donc être vue comme un endomorphisme de  $T_P S$ . On l'appelle *endomorphisme de Weingarten*.

La *courbure de Gauss* en  $P$  est le déterminant de l'endomorphisme de Weingarten que l'on note  $K$ .

- La courbure du plan est nulle en tout point.
- La courbure de la sphère de rayon  $R$  est constante égale à  $1/R^2$ .

Le théorème suivant nous dit que même si la courbure est modifiée localement par un homéomorphisme (deux sphères de rayon 1 et 2 sont homéomorphes mais n'ont pas la même courbure), l'intégrale de la courbure est constante et ne dépend que de la caractéristique d'Euler.

**Théorème (Gauss-Bonnet).** Soit  $S$  une surface fermée. Alors, on peut retrouver la caractéristique d'Euler-Poincaré à partir de la courbure de Gauss.

$$\int_S K ds = 2\pi\chi(S)$$

Par exemple pour la sphère  $S$  de rayon  $R$ ,

$$\int_S K ds = \int_S \frac{ds}{R^2} = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{R^2} = 4\pi = 2 \cdot \chi(S)$$

On peut trouver une démonstration du théorème de Gauss-Bonnet dans *The Gauss-Bonnet Theorem* [4]. On va simplement démontrer la formule de Gauss-bonnet dans le cas discret, pour des polyèdres.

On définit le *défaut d'angle*  $d(s)$  d'un sommet  $s$  d'un polyèdre orientable comme  $2\pi$  moins la somme des angles qui le compose, fois plus ou moins 1 selon que le sommet soit concave ou convexe.

- Si  $d(s) \geq 0$  : le sommet est convexe.
- Si  $d(s) \leq 0$  : le sommet est concave.
- Si  $d(s) = 0$  : le sommet est plat.

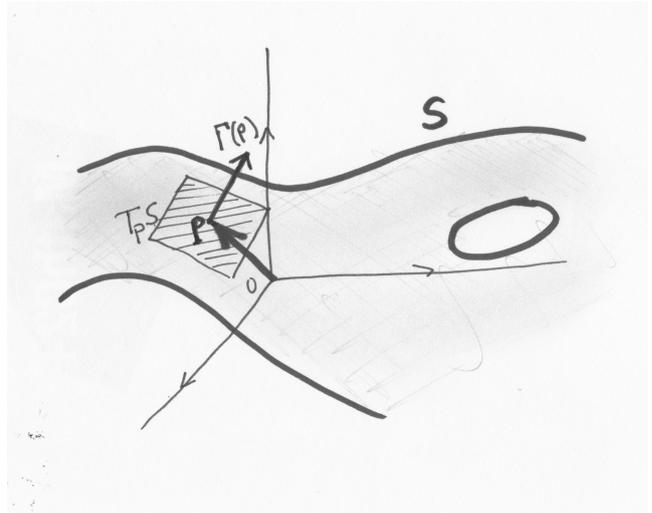


FIGURE 19 – Application de Gauss

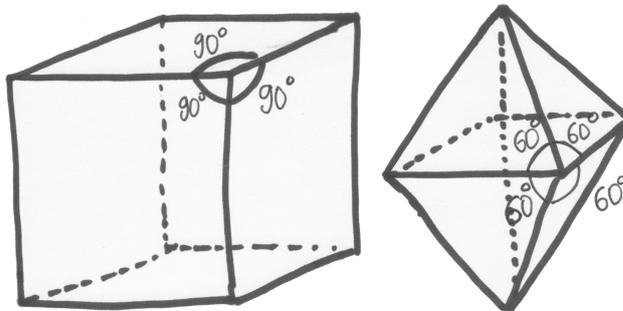
Soit  $\Pi$  un polyèdre orientable. On note respectivement  $S$ ,  $F$  l'ensemble de ses sommets et de ses faces. On définit la *courbure totale*  $K$  du polyèdre  $\Pi$  comme la somme des défauts d'angles de ses sommets.

$$d(s) = \pm(2\pi - \sum \theta_i)$$

$$K(\Pi) = \sum_{s \in S} d(s)$$

Par exemple :

- Dans un cube (polyèdre convexe), chaque sommet a un défaut d'angle de  $2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ . La courbure totale est donc  $8 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi$ .
- Dans un octaèdre régulier, chaque sommet a un défaut d'angle de  $2\pi - 4 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ . La courbure totale de l'octaèdre régulier est donc  $6 \cdot \frac{2\pi}{3} = 4\pi$ .



Dans le cas discret, le théorème de Gauss-Bonnet s'énonce de façon analogue :

$$K(\Pi) = \sum_{s \in S} d(s) = 2\pi\chi(\Pi)$$

*Preuve.* Il n'est pas restrictif de considérer que les faces du polyèdre sont des triangles. Chaque triangle possède 3 côtés, et chaque arête appartient à exactement 2 triangles, donc  $3F = 2A$ . De plus  $2\chi = 2F - 2A + 2S = 2F - 3F + 2S = -F + 2S$ .

$$K(\Pi) = \sum_{s \in S} d(s) = \sum_{s \in S} (2\pi - \sum \theta_i(s)) = 2\pi \cdot S - \sum_{s \in S} \sum \theta_i(s) = 2\pi \cdot S - \pi \cdot F$$

car la somme des angles d'un triangle est  $\pi$ .

$$K(\Pi) = 2\pi \cdot S - \pi \cdot F = \pi(2S - F) = \pi \cdot 2\chi$$

□

Ce théorème dans le cas « discret » intervient dans la démonstration de la formule de Gauss-Bonnet dans Gluck[4].

## 5 Conclusion

Comprendre le théorème de classification, c'est mieux comprendre les surfaces compactes. Grâce à ce théorème nous pouvons dire si deux surfaces compactes sont homéomorphes et nous avons même explicité des représentants « simples » de chaque classe. Pour dire si deux surfaces sont homéomorphes, on peut calculer quelques invariants topologiques d'une surface comme la caractéristique d'Euler-Poincaré. Dans certains cadres, on peut la calculer facilement grâce à la formule de Gauss-Bonnet. Grâce à la théorie de l'homologie, on peut généraliser cette caractéristique à des dimensions supérieures (voire quelconque).

Cependant le théorème de classification que nous avons étudié ne peut se généraliser à des dimensions supérieures, bien que la récente démonstration de la conjecture de Poincaré nous ait permis d'achever la classification des 3-variétés. Bien qu'en dimensions supérieures une classification ne soit pas possible, des résultats sensiblement analogues (bien que moins forts) nous sont donnés par les théories de l'homologie et de la cohomologie.

## Références

- [1] Henry R. Brahana, Systems of circuits on two-dimensional manifolds, *The Annals of Mathematics*. 1921.
- [2] William S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*. 1991.
- [3] Jean Gallier, Dianna Xu *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*. 2011.
- [4] Herman Gluck, Math 501, Differential Geometry, 7. *The Gauss-Bonnet Theorem* 2012.
- [5] Carsten Thomassen, *The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces* 1992.