

Feuille 8

Espaces vectoriels et applications linéaires (suite)

Exercice 1. On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, à quelles conditions sur $x \in \mathbb{R}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Solution : Les trois vecteurs forment une base si et seulement si ils forment un système libre, donc si et seulement si l'équation :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

n'admet que $a = b = c = 0$ comme solution. Or résoudre cette équation est équivalent à résoudre le système :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ bx = 0 \\ b + c = 0 \end{cases},$$

système qui admet comme unique solution $a = b = c = 0$ si et seulement si $x \neq 0$.

Exercice 2. 1. Montrer que $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 4z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de P .

2. Montrer que $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de D .

3. Montrer que $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de H .

Solution :

1. Soit f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x + 2y - 4z,$$

alors f est une application linéaire de noyau l'ensemble P qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

De plus f est clairement surjective (par exemple $f\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x$) de sorte que par le théorème du rang :

$$\dim(P) = \dim(\ker(f)) = 3 - \text{rg}(f) = 2.$$

Enfin, pour fournir une base, il suffit de déterminer deux vecteurs de P qui forment une famille libre, par

exemple $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de P , de plus :

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ -a + 2b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0,$$

ce qui prouve qu'ils forment une famille libre.

2. On procède de même en considérant ici la fonction f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix}.$$

Cette fonction est linéaire de noyau égal à D et est surjective, ainsi $\dim(D) = 1$ et une base de D est constituée d'un vecteur de D non nul comme par exemple $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. On procède de même en considérant ici la fonction f définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = x + y + z + t.$$

Cette fonction est linéaire de noyau égal à H et est surjective, ainsi $\dim(H) = 3$ et une base de H est constituée de trois vecteurs de H qui forment une famille libre comme $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Considérons l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.

- Montrer que l'addition des polynômes et la multiplication des polynômes par un réel font de cet ensemble un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Montrer que le sous-ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré ≤ 2 est un sous-espace vectoriel.
- Montrer que $P_1 = X + 1$, $P_2 = X^2 - 2X$ et $P_3 = X - 1$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- En déduire la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Déterminer les coordonnées dans la base (P_1, P_2, P_3) du polynôme $P = X^2$.

Solution :

- Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_\ell X^\ell$ et $Q(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_m X^m$ deux polynômes et λ et μ deux réels, on suppose sans perte de généralités que $\ell \leq m$, alors :

$$\lambda \cdot P(X) + \mu \cdot Q(X) = \lambda a_0 + \mu b_0 + (\lambda a_1 + \mu b_1)X + \dots + (\lambda a_\ell + \mu b_\ell)X^\ell + \mu b_{\ell+1}X^{\ell+1} + \dots + \mu b_m X^m, \quad (1)$$

est bien un polynôme, ce qui définit en particulier la loi de composition interne $+$ et la loi de composition externe $\cdot$. On vérifie alors que ces lois satisfont les propriétés suivantes :

- $+$ est muni d'un élément neutre (le polynôme nul), le polynôme $P(X)$ a pour symétrique le polynôme $-P(X)$, et $+$ est associative et commutative ;
 - $\cdot$ vérifie $1 \cdot P(X) = P(X)$, $\lambda \cdot (\mu \cdot P(X)) = (\lambda\mu) \cdot P(X)$ et la double distributivité de $\cdot$ par rapport aux additions dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
- La formule (1) appliquée avec $\ell = m = 2$ montre que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par $+$ et $\cdot$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
 - Montrons pour commencer que P_1 , P_2 et P_3 forment une famille libre :

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - c + (a - 2b + c)X + bX^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = 0.$$

Montrons alors que P_1 , P_2 et P_3 forment une famille génératrice, si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$:

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = P(X) \quad \Leftrightarrow \quad a - c + (a - 2b + c)X + bX^2 = P(X) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - c = a_0 \\ a - 2b + c = a_1 \\ b = a_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = (a_0 + a_1)/2 + a_2 \\ b = a_2 \\ c = (-a_0 + a_1)/2 + a_2 \end{cases}.$$

4. La dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc 3, le nombre d'éléments de la base.
5. On écrit $X^2 = (X^2 - 2X) + (X + 1) + (X - 1) = P_1 + P_2 + P_3$ et les coordonnées sont $(1, 1, 1)$.

Exercice 4. Pour chacune des équations différentielles linéaires d'ordre 2 suivantes, déterminer l'ensemble des solutions réelles (on commencera par trouver une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène puis on trouvera une solution particulière) :

1. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$;
2. $y'' - 2y' + y = e^x$;
3. $y'' - 4y' + 8y = \cos(x)$;
4. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$.

Solution :

1. Si $y = e^{\alpha x}$ est solution de $y'' - 2y' + y = (\alpha^2 - 2\alpha + 1)y = 0$ alors α est solution de $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 = 0$. Comme les deux racines sont égales on vérifie facilement que $y_1 = e^x$ et $y_2 = xe^x$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions de $y'' - 2y' + y = 0$ qui est de dimension égale à 2. Ainsi toutes les solutions de $y'' - 2y' + y = 0$ sont de la forme $ae^x + bxe^x$ pour a et $b \in \mathbb{R}$, et toutes les solutions de $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ sont de la forme $ae^x + bxe^x + y_0$ où y_0 est une solution particulière de $y'' - 2y' + y = e^{2x}$, par exemple on peut prendre $y_0 = e^{2x}$ (vérification immédiate).
2. On bénéficie du travail fait en 1. et ici il faut rechercher y_0 de la forme ax^2e^x ce qui conduit à choisir $y_0 = (1/2)x^2e^x$.
3. Le trinôme à résoudre est $\alpha^2 - 4\alpha + 8 = 0$ qui n'a pas de racines réelles mais a les racines complexes $2 \pm 2i$. Dans ce cas les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y = ae^{2x} \cos(2x) + be^{2x} \sin(2x)$ pour a et $b \in \mathbb{R}$, et toutes les solutions de $y'' - 4y' + 8y = \cos(x)$ sont de la forme $ae^{2x} \cos(2x) + be^{2x} \sin(2x) + y_0$ où y_0 est une solution particulière de $y'' - 4y' + 8y = \cos(x)$, par exemple on peut chercher y_0 sous la forme $c \cos(x) + d \sin(x)$ ce qui conduit à résoudre un système 2×2 dont la solution est $y_0 = (7/65) \cos(x) - (4/65) \sin(x)$.
4. Le trinôme à résoudre est $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 2)(\alpha - 1) = 0$, alors $y_1 = e^x$ et $y_2 = e^{2x}$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ et toutes les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$ sont de la forme $ae^x + be^{2x} + y_0$ où y_0 est une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$, par exemple on peut prendre y_0 de la forme $a_0 + a_1x + a_2x^2$ ce qui conduit à résoudre un système 3×3 dont la solution est $y_0 = 4 + 3x + x^2$.

Exercice 5. Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}$ et on considère la fonction g_A de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ définie par $B \rightarrow g_A(B) = AB$.

1. Montrer que g_A est une application linéaire.
2. Si A est inversible, montrer que g_A est un automorphisme de $\mathcal{M}$.
3. Si il existe $C \in \mathcal{M}$ tel que $CA = Id$ (la matrice identité de $\mathcal{M}$), montrer que g_A est injective, en déduire qu'elle est surjective et que C est l'inverse de A .
4. Caractériser le noyau de g_A et en déduire la dimension de ce noyau et le rang de g_A .
5. Si la dimension du noyau de A est égal à $n - 1$ montrer qu'il existe x et y non nuls dans $\mathbb{R}^n$ tels que $A = x^t y$ et caractériser l'image de g_A .
6. Si $n = 2$, montrer que les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et écrire la matrice qui représente l'expression de g_A dans cette base.

Solution :

1. Pour B et $B' \in \mathcal{M}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il vient :

$$g_A(\lambda B + B') = A(\lambda B + B') = \lambda AB + AB' = \lambda g_A(B) + g_A(B'),$$

ce qui prouve la linéarité de g_A .

2. Lorsque A est inversible, on a $AB = C \Leftrightarrow B = A^{-1}C$, et donc $\ker(g_A) = \{0\}$ et $\text{im}(g_A) = \mathcal{M}$.

3. Soit $B \in \ker(g_A)$, alors $AB = 0$ et $0 = C(AB) = (CA)B = B$, ce qui prouve que $\ker(g_A) = \{0\}$. Par le théorème du rang il en résulte que $\text{rang } g_A = n^2 - \dim(\ker(g_A)) = n^2$, de sorte que g_A est surjective. Soit alors $B \in \mathcal{M}$ tel que $g_A(B) = Id$, il vient $C = CId = C(AB) = (CA)B = B$ et donc C vérifie $AC = CA = Id$.

4. On a :

$$B \in \ker(g_A) \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow \text{im}(B) \in \ker(A),$$

ainsi $\dim(\ker(g_A)) = n \times \dim(\ker(A))$ (nombre d'applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\ker(A)$). Enfin, par le théorème du rang $\text{rg}(g_A) = n^2 - n \dim(\ker(A)) = n(n - \dim(\ker(A)))$.

5. Par le théorème du rang on obtient $\text{rg}(A) = n - (n-1) = 1$ et toutes les colonnes de A sont proportionnelles à un vecteur colonne $C \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire qu'il existe des coefficients $d_1, \dots, d_n$ de $\mathbb{R}$ non tous nuls

tels que la i -ème colonne de A vaut $d_i C$. Autrement dit, en posant $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ on a $A = C^t D$ et

$AB = (C^t D)B = C(^t D B) = C(^t B D)$ où $^t B D$ est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$. Il en résulte que AB a toutes ses colonnes qui sont proportionnelles à C et comme $D \neq 0$ en changeant de matrice B on peut obtenir tous les coefficients de proportionnalité possible. En conclusion $\text{im}(g_A)$ est constitué des matrices dont les colonnes sont proportionnelles à C .

6. On a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice qui est aussi libre car la somme ci-dessus est nulle si et seulement si $a = b = c = d = 0$. D'autre part, en posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$g_A\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$g_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$g_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$g_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

de sorte que la matrice associée à g_A vaut $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

- Montrer qu'il existe $c_1 = c_1(a)$ et $c_2 = c_2(a)$ tels que $A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ et discuter en fonction de a des valeurs des quantités $\text{rg}(A(a))$ et $\dim(\ker(A(a)))$.
- Recommencer pour la matrice $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.
- Généraliser.

Solution :

1. On a $c_1 = a + 1$ et $c_2 = a - 1$.
2. Il suffit de montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une famille libre, ce qui est facile à vérifier.
En conséquence, si $a \notin \{-1, 1\}$ alors $\text{im}(A(a)) = \mathbb{R}^2$ ce qui implique $\text{rg}(A(a)) = 2$ et $\dim(\ker(A(a))) = 0$ (théorème du rang), tandis que si $a \in \{-1, 1\}$ alors $\text{rg}(A(a)) = \dim(\ker(A(a))) = 1$.

3. On a :

$$A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ;$$

avec les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui forment une base de $\mathbb{R}^3$. Il en résulte que si $a \notin \{-2, 1\}$ alors $\text{im}(A(a)) = \mathbb{R}^3$ ce qui implique $\text{rg}(A(a)) = 3$ et $\dim(\ker(A(a))) = 0$, tandis que si $a = -2$ alors $\text{rg}(A(a)) = 2$ et $\dim(\ker(A(a))) = 1$, et si $a = 1$ alors $\text{rg}(A(a)) = 1$ et $\dim(\ker(A(a))) = 2$.

4. On a pour $A(a)$ $p \times p$ de même forme :

$$A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (a+p-1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} ; A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = (a-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} ; A(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} = (a-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} ; \dots$$

avec les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots$ (il y en a p en tout) qui forment une base de $\mathbb{R}^p$. Il en résulte que si $a \notin \{-p+1, 1\}$ alors $\text{im}(A(a)) = \mathbb{R}^p$ ce qui implique $\text{rg}(A(a)) = p$ et $\dim(\ker(A(a))) = 0$, tandis que si $a = -p+1$ alors $\text{rg}(A(a)) = p-1$ et $\dim(\ker(A(a))) = 1$, et si $a = 1$ alors $\text{rg}(A(a)) = 1$ et $\dim(\ker(A(a))) = p-1$.

Exercice 7. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que $x - f(x) \in \ker(f)$.
2. Montrer que $\text{im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe $y \in \text{im}(f)$ et $z \in \ker(f)$ tels que $x = y + z$.
4. Montrer que la décomposition précédente est unique et que $f(x) = y$, on dit que f est le projecteur sur $\text{im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.
5. Si $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ montrer que $A^2 = A$ et que $f_A(f_A(x)) = f_A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.
Représenter dans le plan $\text{im}(f_A)$, $\ker(f_A)$ et l'action de f_A .

Solution :

1. Par linéarité et par hypothèse $f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$.
2. Soit $x \in \text{im}(f) \cap \ker(f)$, alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $f(y) = x$ et pour ce y on a $0 = f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$.
3. On peut prendre $y = f(x)$ car $z = x - f(x) \in \ker(f)$.
4. Soit y et $y' \in \text{im}(f)$ et z et $z' \in \ker(f)$ vérifiant $y + z = y' + z' \Leftrightarrow y - y' = z' - z$, alors $y - y' = z' - z \in \text{im}(f) \cap \ker(f)$ et est donc nul.

5. Il est facile de vérifier que $A^2 = A$ et en passant en vecteur colonne, comme $f_A(x) = Ax$, il vient $f_A(f_A(x)) = A(Ax) = (AA)x = (A^2)x = Ax = f_A(x)$. Par ailleurs $\text{im}(f_A)$ est l'espace vectoriel engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (la première diagonale) et $\ker(f_A)$ est l'espace vectoriel engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (la seconde diagonale). f_A est le projecteur sur la première diagonale parallèlement à la seconde diagonale.
-