Feuille 7
Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1. Solution :

1. Il y a trois "familles" d'applications injectives de X vers Y : celles qui envoient 1 sur 1, celles qui envoient 1 sur 2 et celles qui envoient 1 sur 3. Une application injective, une fois que l'on sait à laquelle de ces trois familles elle appartient, est donc complètement déterminée par l'image de 2. Or, dans le cas de la première famille, aucune application f ne peut envoyer 2 sur 1 car on aurait $f(1) = f(2)$ ce qui contredirait l'injectivité de f. Ainsi (dans le cas de la première famille) 2 est nécessairement envoyé sur 2 ou sur 3. Il y a donc deux applications dans la première famille, à savoir $f_1 : 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2$ et $f_2 : 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 3$.
   En réalité, le même raisonnement marche avec chacune des trois familles. Dans la famille des applications qui envoient 1 sur 2, il y a les deux applications $g_1 : 2 \mapsto 1$ et $g_2 : 2 \mapsto 3$ (mais pas $1, 2 \mapsto 2$ qui n'est pas injective). Dans la famille des applications qui envoient 1 sur 3 il y a les deux applications $h_1 : 2 \mapsto 1$ et $h_2 : 2 \mapsto 2$ (mais pas $1, 2 \mapsto 3$ qui n'est pas injective).
2. Il y a donc 2 applications dans chaque famille, soit au total $2 + 2 + 2 = 2 \times 3 = 6$ applications injectives de X dans Y.
3. Pour une application $f : Y \to X$ on définit $f^{-1}(1) := \{y \in Y | f(y) = 1\}$, l'ensemble des *antécédents* de 1 par f, ainsi que l'ensemble $f^{-1}(2) := \{y \in Y | f(y) = 2\}$ des *antécédents* de 2 par f. Chaque élément de Y est nécessairement envoyé soit vers 1, soit vers 2, c'est-à-dire $f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2) = Y$. La surjectivité de f revient à dire que $f^{-1}(1) \neq \varnothing$ ***et que*** $f^{-1}(2) \neq \varnothing$. Pour construire une application surjective de Y vers X, il suffit donc de choisir un sous-ensemble F de Y qui a deux éléments (il y en a trois $F_1 = \{2, 3\}, F_2 = \{1, 3\}, F_3 = \{1, 2\}$) puis de choisir si f envoie ces deux éléments tous les deux vers 1 ou tous les deux vers 2 (il y a donc deux possibilités pour chaque F_i, $i = 1, 2, 3$). En effet, alors l'élément de $Y \setminus F$ sera nécessairement envoyé vers l'autre valeur puisque f doit être surjective. Au total donc : 3×2 choix. Là-encore il y a ainsi 6 applications surjectives de Y vers X.
4. Récapitulons notre procédure de démonstration. Construire une application injective f de $X = \{1, ..., p\}$ vers $Y = \{1, ..., n\}$ $(1 \leq p \leq n)$ revient à :
   — *d'abord choisir son image* : par hypothèse d'injectivité de f, il doit nécessairement s'agir d'un sous-ensemble de Y contenant *exactement* p éléments, or il y a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ tels sous-ensembles de $Y = \{1, ..., n\}$. Notons $\{a_1, ..., a_p\}$ $(a \neq b)$ cette image.
   — *puis déterminer pour chaque* $k \in \{1, ..., p\}$ *sur lequel des* a_i f *envoie* k : on note alors $i = \sigma(k) \in \{1, ..., p\}$ l'entier tel que $f(k) = a_{\sigma(k)}$ de sorte que $\sigma : \{1, ..., p\} \to \{1, ..., p\}$ est une permutation de $\{1, ..., p\}$. En effet f doit être injective donc si $\sigma(k) = \sigma(k')$ alors $f(k) = a_{\sigma(k)} = a_{\sigma(k')} = f(k')$ donc $k = k'$ par injectivité de f. Or réciproquement (une fois le sous-ensemble $\{a_1, ..., a_p\} \subset \{1, ..., n\}$ déterminé) toute telle permutation détermine entièrement une fonction injective définie par $f(k) = a_{\sigma(k)}$.
   Une fois le sous-ensemble image $\{a_1, ..., a_p\} \subset \{1, ..., n\}$ déterminé, on a donc montré ***qu'il était équivalent de*** définir une permutation de $\{1, ..., p\}$ plutôt qu'une application injective de X vers Y *ayant cette image.*

   Ainsi le nombre d'applications injectives de X vers Y est le produit de $\binom{n}{p}$ (nombre de choix possibles pour l'image de f) par $p!$ (nombre de permutations de l'ensemble $\{1, ..., p\}$), soit au total $\binom{n}{p} p! = \frac{n!}{(n-p)!}$ applications injectives de X vers Y.
   Remarque : Notons $Inj(X, Y)$ l'ensemble des applications injectives de X vers Y, $\mathcal{P}_p(\{1, ..., n\})$ l'ensemble des parties à p éléments de $\{1, ..., n\}$ et $Perm(\{1, ..., p\})$ l'ensemble des permutations de $\{1, ..., p\}$. En réalité, on a construit une bijection
   $$\varphi : Inj(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_p(Y) \times Perm(\{1, ..., p\})$$
   ce qui assure que l'ensemble $Inj(X, Y)$ de gauche a bien le même nombre d'éléments que l'ensemble produit $\mathcal{P}_p(Y) \times Perm(\{1, ..., p\})$ de droite. Or le nombre d'élément d'un ensemble produit $E \times F$ (fini) est le produit du nombre d'éléments de E par le nombre d'éléments de F.

Exercice 2. Solution :

- E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- E_1' n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En fait, ce n'est même pas un sous-groupe abélien car les vecteurs $u = (1,0,0)$ et $v = (0,1,0)$ sont dedans mais leur somme $u+v = (1,1,0)$ ne vérifie pas l'équation $xy = 0$.
- E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- E_2' n'est pas un (sous-)espace vectoriel car il ne contient pas l'élément nul. Remarquons que ce n'est même pas un sous-groupe car le vecteur $(2,0,0) = (1,0,0) + (1,0,0) \notin E_2'$ alors qu'il est somme de deux vecteurs de E_2'.
- E_3 n'est pas un (sous-)espaces vectoriel (de $\mathbb{R}^2$) car ce n'est pas un groupe abélien. En effet, les points $(0,-1)$ et $(\frac{1}{2}, 0)$ sont dans E_3 mais leur somme $(\frac{1}{2}, 0) + (0,-1) = (\frac{1}{2}, -1) \notin E_3$ car $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{4} \leq 0$.
  Remarque : par contre E_3 est stable par multiplication par un scalaire (faire un dessin).
- E_3' est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ tout entier car l'inégalité $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ est vraie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$!
  Remarque : un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par une inégalité n'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ que lorsque l'inégalité en question est équivalente à un système linéaire.
- E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- E_4' n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car il ne contient pas l'élément nul (la fonction nulle).
- E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ car il ne contient pas l'élément nul (le polynôme nul).
- E_5' car si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, alors $-f = (-1) \cdot f$ est décroissante...

Exercice 3. Solution :

1. — V_1 est un sous-espace vectoriel. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit f (*resp.* g) une fonction bornée par M (*resp.* par N), c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$.
   Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda| M$ et donc $|\lambda f| \leq |\lambda| M$. λf est donc bornée.
   De même, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + N$. Ainsi $f + g$ admet $M + N$ comme borne et est donc une fonction bornée.
   — V_2 par contre n'en est pas un, car $-f$ n'est pas forcément majorée quand f l'est. Un contre-exemple est la fonction $-exp$ qui est toujours négative donc majorée, mais dont l'opposée exp est loin d'être majorée.
   — V_3 est un sous-espace vectoriel : $f + g$ est paire dès que f et g le sont, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) aussi quand f est paire.
   — V_4 n'est pas un sous-espace vectoriel. Contre-exemple : $f : x \mapsto x^2 + x$. En effet $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$ tandis que $f(1) = 2 \neq 0$. Donc l'assertion suivante est fausse :
   $$(\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(-x) = f(x))\ \textit{ou}\ (\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(-x) = -f(x)).$$
   Pourtant, f est la somme d'une fonction paire ($x \mapsto x^2$) et d'une fonction impaire ($x \mapsto x$), ce qui montre que la *réunion* de l'espace des fonctions paires et des fonction impaires n'est pas un espace vectoriel.
   Remarque : en général, il n'est jamais vrai que la réunion de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel (sauf si l'un est inclus dans l'autre).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On cherche g une fonction paire et h une fonction impaire telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$. Mais alors on doit aussi avoir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. Sommant (*resp.* soustrayant) alors les deux égalités précédentes on obtient :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ 2g(x) = f(x) + f(-x)\ (\textit{resp.}\ 2h(x) = f(x) - f(-x))$$
   D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ (*resp.* $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$) Il reste à vérifier que ces deux fonctions g et f vérifient bien $g + h = f$ (ce qui est immédiat) mais aussi que g est bien paire et h impaire. Traitons par exemple le cas de h. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$, d'où l'imparité de h.

3. Ce sont : $\mathbb{R}^2$, les droites $\mathbb{R}u$ engendrées par un vecteur $u \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, et enfin l'espace vectoriel nul $\{0\}$ qui est contenu dans tous les autres. La raison en est que parmi trois vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^2$, il y en a toujours un que l'on peut exprimer en fonction des deux autres. En effet, si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, ou bien ils sont tous les deux nuls, ou bien ils sont colinéaires, ou bien ils ne sont pas colinéaires et alors engendrent $\mathbb{R}^2$ tout entier (le vérifier par un dessin).

Exercice 4. Solution :

1. Additivité : si $3x_i + y_i - 4z_i = 0$ $(i = 1, 2)$ alors en sommant on a $3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - 4(z_1 + z_2) = (3x_1 + y_1 - 4z_1) + (3x_2 + y_2 - 4z_2) = 0$ donc si deux vecteurs $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2)$ appartiennent à P alors leur somme $v_1 + v_2 \in P$ également.
   Multiplication par un scalaire : si $3x_1 + y_1 - 4z_1 = 0$ et que $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $3(\lambda x_1) + (\lambda y_1) - 4(\lambda z_1) = \lambda(3x_1 + y_1 - 4z_1) = \lambda \cdot 0 = 0$. Donc si $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in P$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v_1 \in P$.
   On a donc montré que P était un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $f(v) = \langle v, v' \rangle = x + 2y + 3z$. Or une démonstration analogue à la question précédente montre que pour tout $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, $f(v_1 + v_2) = f(v_1 + v_2)$ et que si en outre $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda v_1) = \lambda v$. En d'autres termes, f est linéaire.
3. L'orthogonalité du vecteur $v = (x, y, z)$ à v' s'exprime à travers la condition $0 = \langle v, v' \rangle$, c'est-à-dire $0 = f(v) = x + 2y + 3z$. Il suffit de refaire la démonstration de la première question (seuls les coefficients ont changé).

Exercice 5. Solution :

1. On se demande s'il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $(9, 2, 7) = ru + sv = r(1, 2, -1) + s(6, 4, 2) = (r + s, 2r + 4s, -r + 2s)$. Il s'agit donc de résoudre un système en s et t :

$$\begin{cases} r + s = 9 \\ 2r + 4s = 2 \\ -r + 2s = 7 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r + s = 9 \\ 2r + 4s = 2 \\ 3s = 16 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{16}{3} L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r = 9 - \dfrac{16}{3} = \dfrac{11}{3} \\ 2r + s = 2 \\ 3s = 16 \end{cases}$$

   Or $2r + s = 2\dfrac{11}{3} + \dfrac{16}{3} = \dfrac{38}{3} \neq 2$ donc ce système n'a pas de solution. On en conclut que $(9, 2, 7)$ n'est pas combinaison linéaire de u et v.
   On refait les mêmes opérations avec le vecteur $(4, -1, 8)$ au lieu de $(9, 2, 7)$ et on obtient $s = 4$ et $r = 0$. Pourtant, bien que $r = 0$, $(4, -1, 8)$ n'est pas colinéaire à v. Donc là-encore $(4, -1, 8)$ n'est pas combinaison linéaire de u et v.
2. On cherche à résoudre :

$$\begin{cases} r + s = x \\ 2r + 4s = 2 \\ -r + 2s = -3 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r + s = x \\ 2r + 4s = 2 \\ 3s = -3 + x \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{-3+x}{3} L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r = x - \dfrac{-3 + x}{3} = \dfrac{2x + 3}{3} \\ 2r + s = 2 \\ s = \dfrac{-3 + x}{3} \end{cases}$$

   Les solutions de ce système sont donc les couples $(r, s) = \dfrac{1}{3}(2x + 3, x - 3)$ vérifiant $2 = 2r + s = 2/3(2x + 3) + 1/3(x - 3) = 1/3(5x + 2)$, c'est-à-dire $x = 4/5$. $(4/5, 2, -3)$ est donc l'unique vecteur de la forme $(x, 2, -3)$ à être combinaison linéaire de u et v.

Exercice 6. Solution :

1. On procède par équivalences en appliquant le Pivot de Gauss en éliminant les paramètres.

$$v = (x, y, z) \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = 2x \\ z = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$$

2. On applique là-encore le Pivot de Gauss pour éliminer les paramètres du système (ici notés s et t).

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t - s \\ y = 2t \\ z = 3t + s \end{cases} \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - s \\ y = 2t \\ z = \frac{3}{2}y + s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - s \\ y = 2t \\ z - 3x = s + 3s = 4s \end{cases} \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}(z - 3x) \\ y = 2t \\ z - 3x = s + 3s = 4s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} 4x = 2y - z + 3x \\ y = 2t \\ z - 3x = s + 3s = 4s \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y + z = 0.$$

3. Supposons $\alpha \neq 0$.

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2 + \mathbb{R}u_3 \Leftrightarrow \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t + 2s + r \\ y = 2t + s \\ z = \alpha r \end{cases} \Leftrightarrow \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t + 2s + \alpha^{-1}z \\ y - 2x = s - 4s - 2\alpha^{-1}z \\ z = \alpha r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t + 2s + \alpha^{-1}z \\ y - 2x + 2\alpha^{-1}z = -3s \\ z = \alpha r \end{cases} \Leftrightarrow \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t + \frac{-2}{3}(y - 2x + 2\alpha^{-1}z) + \alpha^{-1}z \\ y - 2x + 2\alpha^{-1}z = -3s \\ z = \alpha r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} -x + 2y + \alpha^{-1}z = 3t \\ y - 2x + 2\alpha^{-1}z = -3s \\ z = \alpha r \end{cases} \Leftrightarrow \exists t, s, r \in \mathbb{R}, \begin{cases} -\alpha x + 2\alpha y + z = 3\alpha t \\ \alpha y - 2\alpha x + 2z = -3\alpha s \\ z = \alpha r \end{cases}$$

Ce qui est toujours vrai quelque soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Ainsi u_1, u_2 et u_3 engendrent tout l'espace $\mathbb{R}^3$. Quand $\alpha = 0$, u_1, u_2 et u_3 engendrent seulement le sous-espace vectoriel $z = 0$. De plus, $u_3 = -\frac{1}{3}(u_1 - 2u_2)$. Lorsque $\alpha = 0$, le système d'équation plus haut devient équivalent à $z = 0$. On retrouve bien ce que l'on vient de dire.

Exercice 7. Solution :

C'est une vérification standard qui est menée dans le cours.

Supposons par l'absurde qu'il existe des scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$sin(3x) = \alpha sin(x) + \beta sin(2x).$$

Alors cette égalité serait en particulier vérifiée en $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{4}$ de sorte qu'on obtient le système suivant : $\begin{cases} 0 = \alpha\frac{\sqrt{3}}{2} + \beta\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 = \alpha \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta = -1 \\ \sqrt{2} = 1 \end{cases}$ ce qui est absurde. On en déduit que la fonction $x \mapsto sin(3x)$ n'est pas combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto sin(x)$, $x \mapsto sin(2x)$.

Une autre méthode consiste à dériver l'égalité $sin(3x) = \alpha sin(x) + \beta sin(2x)$ un nombre pair de fois. On obtient alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3^{2p} sin(3x) = \alpha sin(x) + \beta 2^{2p} sin(2x)$. Divisant par 3^{2p} et faisant tendre p vers l'infini on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sin(3x) = 0$. Ce qui est contradictoire.

Cette méthode se généralise plus facilement à la famille de fonctions $\{x \mapsto sin(kx)\}_{1 \leq k \leq n}$. Et on montre que $x \mapsto sin((n+1)x)$ n'est pas combinaison linéaire de ces autres fonctions. En réalité sur un intervalle compact $[a, b]$ ces fonctions permettent "d'approcher" toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, c'est la base de ce qu'on appelle le *développement en séries de Fourier* de f.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Asin(x+\phi) = Acos(\phi)sin(x) + Asin(\phi)cos(x)$. Ce qui montre que $F \subset E := \mathbb{R} \cdot \{x \mapsto sin(x)\} + \mathbb{R} \cdot \{x \mapsto cos(x)\}$. Il reste à montrer l'autre inclusion !
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On chercher à écrire la fonction $\alpha cos + \beta sin$ sous la forme d'une fonction $x \mapsto Asin(x+\phi)$ avec $A, \phi \in \mathbb{R}$. Tout d'abord on pose $A = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ la norme du vecteur (α, β) de sorte que $(\alpha/A, \beta/A)$ soit un vecteur de norme 1, c'est-à-dire définisse un point du cercle unité. On sait qu'il existe alors un angle $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $(\alpha/A, \beta/A) = (cos(\varphi), sin(\varphi))$. En résumé on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha cos + \beta sin)(x) = A(cos(\varphi)cos(x) + sin(\varphi)sin(x)) = Acos(x-\varphi) = Asin(x - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

D'où le résultat avec $\phi = -\varphi + \frac{\pi}{2}$. On a donc montré par double inclusion que $F = E$.

E est défini comme le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions cosinus et sinus, c'est donc clairement un espace vectoriel, et donc F également bien que ça ne soit pas évident à première vue.

Exercice 8. Solution :

1. $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $tu = (tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si deux suites u et v sont convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' et que t est un réel, alors $(u_n+v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$ et $tu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t\ell$. Donc les deux suites $u+v$ et tu convergent. Autrement dit, $\mathcal{L}$ est un sev de $\mathcal{S}$.
3. Si deux suites u et v convergent vers 0, alors $(u_n + v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $tu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $(t \in \mathbb{R})$. Donc les deux suites $u+v$ et tu convergent vers 0. Autrement dit, $\mathcal{L}_0$ est un sev de $\mathcal{S}$.

Exercice 9. Solution :

1. Pour toutes suites $u, v \in \mathcal{S}$ et tout scalaire $t \in \mathbb{K}$,

$$\phi(u+v) = (u_0+v_0, ..., u_{p-1}+v_{p-1}) = (u_0, u_1, ..., u_{p-1}) + (v_0, v_1, ..., v_{p-1}) = \phi(u) + \phi(v)$$

   et

$$\phi(tu) = (tu_0, tu_1, ..., tu_{p-1}) = t(u_0, u_1, ..., u_{p-1}) = t\phi(u).$$

   Donc l'application ϕ est linéaire.

2. ϕ est clairement surjective car pour tout vecteur $(a_0, a_1, ..., a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$, la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les p premiers termes sont les $a_i, 0 \geq i \geq p-1$ ($u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$,..., $u_{p-1} = a_{p-1}$) et dont les suivants sont nuls $(0 = u_p = u_{p+1} = ... = u_n = ...)$ vérifie $\phi(u) = (a_0, a_1, ..., a_{p-1})$.
   Par contre ϕ n'est pas injective car toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ dont les p premiers termes sont nuls est d'image nulle par ϕ, c'est-à-dire vérifie $\phi(u) = (u_0, u_1, ..., u_{p-1}) = 0$. En fait précisément, le noyau de l'application ϕ est le sous-espace vectoriel

$$\ker(\phi) = \{u \in \mathcal{S} | (u_0, u_1, ..., u_{p-1}) = \phi(u) = 0\} \text{ (c'est sa définition).}$$

Exercice 10. Solution :

1. Pour toutes suites $u, v \in \mathcal{S}$ et tout scalaire $t \in \mathbb{K}$,

$$T(u+v) = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3, ...) = (u_1, u_2, u_3, ...) + (v_1, v_2, v_3, ...) = T(u) + T(v)$$

   et

$$T(tu) = (tu_1, tu_2, tu_3, ...) = t(u_1, u_2, u_3, ...) = tT(u).$$

   Donc l'application T est linéaire.
   De plus, son espace de départ et son espace d'arrivée sont les mêmes donc T est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$.

2. T est clairement surjective car, pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, la suite v définie par $v_0 = 0$, $v_1 = u_0$, $v_2 = u_1$ et $v_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifie $T(v) = u$.
   T n'est pas injective car toute suite $u = (u_0, 0, 0, 0, ...)$ vérifie $T(u) = 0$ et quand $u_0 \neq 0$, $u \neq 0$.
   Son noyau est en fait le sous-espace vectoriel

   $\ker(T) = \{u = (u_0, u_1, u_2...) \in \mathcal{S}$ telles que $u_0 \in \mathbb{K}$ et $T(u) = (u_1, u_2, u_3...) = (0, 0, 0, ...) = 0\}$ (par définition).

Exercice 11. Solution :

1. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $(P+Q)' = P' + Q'$ (*resp.* $\Delta(P+Q) = \Delta(P) + \Delta(Q)$) et $(tP)' = tP'$ (*resp.* $\Delta(tP) = t\Delta(P)$) . Les opérateurs D et T sont donc $\mathbb{R}$-linéaires. En outre, ils ont même espace d'arrivée que de de départ donc ce sont des endomorphismes.
2. $P' = 0$ implique que $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme constant. Inversement, tout polynôme constant P vérifie $P' = 0$. Donc le noyau de D est constitué des polynômes constants.
   Pour Δ, les polynômes constants également vérifie $\Delta P = 0$, $P \in \mathbb{R}[X]$. Inversement, un polynôme $P(X) = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + ... + a_1X + a_0$ avec $a_p \neq 0$ vérifiant $P(X+1) - P(X) = \Delta P = 0$ vérifie alors $P(n+1) = P(n-1) = P(n-2) = ... = P(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et donc $P(0) = P(n) = a_pn^p + a_{p-1}n^{p-1} + ... + a_1n + a_0 \sim_{n\to+\infty} a_pn^p$ ce qui est impossible pour une constante telle que $P(0)$ puisque par hypothèse $a_p \neq 0$.
3. Supposons que l'on ait une relation de liaison entre des polynômes $P_1, ..., P_n$ vérifiant $\deg P_1 < ... < \deg P_n$:
   $$\alpha_1P_1 + ... + \alpha_nP_n = 0$$
   avec $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Appliquons $\deg P_n$ fois l'opérateur de dérivation D à la relation de liaison. Par linéarité de D, donc de $D^{\deg P_n}$, on obtient
   $$\alpha_1D^{\deg P_n}(P_1) + ... + \alpha_nD^{\deg P_n}(P_n) = 0. \qquad (*)$$
   Mais on sait que dériver un polynôme $P = a_rX^r + ... + a_1X + a_0$ strictement plus de r fois le rend nul, donc comme $\deg P_1, \deg P_2, ..., \deg P_{n-1} < \deg P_n$
   $$D^{\deg P_n}(P_1) = D^{\deg P_n}(P_2) = ... = D^{\deg P_n}(P_{n-1}) = 0.$$
   D'autre part, en séparant le terme de plus haut degré de P_n, on peut écrire $P_n = cX^{\deg P_n} + Q$ où $\deg Q < \deg P_n$ et $c \neq 0$. Ainsi
   $$D^{\deg P_n}(P_n) = c \cdot (\deg P_n)! + 0.$$
   L'équation (*) se réduit alors à $0 = \alpha_nD^{\deg P_n}(P_n) = \alpha_nc \cdot (\deg P_n)!$ et puisque $c \neq 0$, on en conclut que $\alpha_n = 0$. En appliquant, le même raisonnement à la relation de liaison plus petite suivante
   $$\alpha_1P_1 + ... + \alpha_{n-1}P_{n-1} = 0$$
   on pourrait montrer que $\alpha_{n-1} = 0$. En raisonnant ainsi de suite, on montre que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, c'est-à-dire que toute relation de liaison entre les polynômes $P_1, ..., P_n$ est la relation triviale, donc la familles est *libre.*
4. Il est clair qu'un polynôme qui vérifie (#)vérifie également que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\Delta P(m) = P(m+1) - P(m) \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, ΔP vérifie (#).
5. Pour tout $n \geq 0$, on a
   $$\begin{aligned}\Delta T_n =& \frac{[X+1][(X+1)+2]...[(X+1)+n-1]}{n!} - \frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!}\\ =& \frac{(X+1)...(X+n-1)}{n!}[((X+1)+n-1) - X]\\ =& \frac{(X+1)...(X+n-1)}{n!}n = T_{n-1}.\end{aligned}$$
   Par ailleurs $\Delta T_0 = 1 - 1 = 0$.

6. Cette fois-ci c'est l'opérateur Δ que l'on applique au polynôme
$$P = \alpha_0 T_0 + ... + \alpha_N T_N \in \mathbb{R}[X] \text{ où } \alpha_1, ..., \alpha_N \in \mathbb{R}.$$
On l'applique N fois, pour obtenir successivement
$$\begin{aligned} \Delta P =& \alpha_0 \Delta T_0 + \alpha_1 \Delta T_1 + ... + \alpha_N \Delta T_N = 0 + \alpha_1 T_0 + \alpha_2 \Delta T_1 + ... + \alpha_N T_{N-1} \\ \Delta^2 P =& \alpha_0 \Delta^2 T_0 + \alpha_1 \Delta^2 T_1 + ... + \alpha_N \Delta^2 T_N = 0 + 0 + \alpha_2 T_0 + \alpha_3 T_1 ... + 0 + \alpha_N T_{N-2} \\ & ... \\ \Delta^{N-1} P =& 0 + ... + 0 + \alpha_{N-1} T_0 + \alpha_N T_1 \\ \Delta^N P =& \alpha_N T_0 = \alpha_N \end{aligned}$$
Mais comme P vérifie (#), d'après la question 4. on sait que $\Delta^k P$ vérifie (#) pour tout $k \in \mathbb{N}$.
De la dernière ligne on tire que $\alpha_N = \Delta^N P \in \mathbb{N}$.
De l'avant dernière ligne on tire que $\alpha_{N-1} = \Delta^{N-1} P - \alpha_N$ vérifie (#), ce qui implique que $\alpha_{N-1} \in \mathbb{N}$.
De proche en proche, c'est-à-dire en réalité par récurrence descendante, on montre que $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $0 \leq k \leq N$.

Exercice 12. Solution :

1. $\forall f, g \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R},\ ev_a(tf+g) = (tf+g)(a) = (tf)(a) + g(a) = t \cdot f(a) + g(a) = tev_a(f) + ev_a(g)$.
2. Le noyau de l'application linéaire ev_a est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(a) = ev_a(f) = 0$.
De plus, toute fonction f est la somme de la fonction constante $f(a)$ et de la fonction $f_a = f - f(a)$ $(f = f(a) + (f - f(a)))$. Or la seconde est dans le noyau de ev_a, donc toute fonction s'écrit comme la somme d'une fonction constante et d'une fonction de $\ker ev_a$.
En outre, notant $C \subset \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ le sev des fonctions constantes, on voit que $C \cap \ker ev_a = \{0\}$. En effet, si $f \in C \cap \ker ev_a$, alors pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) \underset{(f \in C)}{=} f(a) = ev_a(f) \underset{(f \in \ker ev_a)}{=} 0.$$
Donc $f = 0$ et donc $C \cap \ker ev_a \subset \{0\}$.
3. $N := \ker ev_{a_1,a_2} = \ker ev_{a_1} \cap \ker ev_{a_2}$. Un supplémentaire est $\mathbb{R}_1[X]$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions polynomiales de degré ≤ 1. Soit en effet $f \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$. On définit alors le polynôme de degré 1 suivant :
$$P(X) = f(a_1) \frac{X - a_2}{a_1 - a_2} + f(a_2) \frac{X - a_1}{a_2 - a_1} \in \mathbb{R}_1[X] \text{ (bien défini car } a_1 \neq a_2).$$
Il est facile de vérifier que $P(a_1) = f(a_1)$ et que $P(a_2) = f(a_2)$. Ainsi la fonction $(f - P)$ s'annule en a_1 et en a_2, c'est-à-dire $(f - P) \in N = \ker ev_{a_1,a_2}$. Comme on a $f = (f - P) + P$, il en découle que $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) = N + \mathbb{R}_1[X]$.
Montrons maintenant que la somme est directe, c'est-à-dire $N \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0\}$. Soit donc $f \in N \cap \mathbb{R}_1[X]$. Alors, d'une part $f(a_1) = f(a_2) = 0$, et d'autre part il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \alpha X + \beta.$$
En évaluant en $x = a_1$ et en $x = a_2$, on en déduit que $\alpha a_2 + \beta = f(a_2) = 0 = f(a_1) = \alpha a_1 + \beta$. Par différence, il vient alors que $\alpha(a_2 - a_1) = 0$ donc $\alpha = 0$ puisque $a_2 \neq a_1$. Ainsi $f = \beta$ et en évaluant en a_1 on en déduit que $\beta = f(a_1) = 0$.
D'où $f = 0$ et donc $N \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0\}$.
En fin de compte N et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe et on écrit
$$\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) = N \oplus \mathbb{R}_1[X].$$

4. Un supplémentaire de $\ker ev_{a_1,...,a_n} = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} | f(a_1) = f(a_2) = ... = f(a_n) = 0\}$ est $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Il s'agit d'utiliser les polynômes suivants :

$$P_i(X)\frac{(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)...\widehat{(X-\alpha_i)}...(X-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_1)(\alpha_i-\alpha_2)...\widehat{(\alpha_i-\alpha_i)}...(\alpha_i-\alpha_n)}$$ (le chapeau signifie qu'on ôte le terme qu'il surmonte).

Ces polynômes ont l'agréable propriété que $P_i(a_i) = 1$ mais $P_i(a_k) = 1$ pour tout $k \neq i$. De plus, pour tout $i = 1, ..., n$, $P_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En utilisant la décomposition de f suivante :

$$f = f_1 + f_2 \text{ où } f_1 = f - f(a_1)P_1 - f(a_2)P_2 - ... - f(a_n)P_n \text{ et } f_2 = f(a_1)P_1 + f(a_2)P_2 + ... + f(a_n)P_n$$

il n'est plus très difficile de montrer que $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R}) = \ker ev_{a_1,...,a_n} + \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En effet, $f_1 \in \ker ev_{a_1,...,a_n}$ et $f_2 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Il reste à montrer que la somme est directe (c'est la partie vraiment difficile). Mais une fonction dans l'intersection $\ker ev_{a_1,...,a_n} \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]$ doit s'annuler en $a_1, a_2, ..., a_n$ tout en étant un polynôme de degré $\leq (n-1)$. Mais on sait que tout polynôme de degré $\leq (n-1)$ qui s'annule en n points est nécessairement nul (*un polynôme ne peut pas avoir plus de racines que sont degré*). Ceci implique que $f = 0$ ou encore que $\ker ev_{a_1,...,a_n} \cap \mathbb{R}_{n-1}[X] = \{0\}$.
Et finalement on a montré que $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R}) = \ker ev_{a_1,...,a_n} \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 13. Solution :

1. C'est toujours la même chose, il faut vérifier la stabilité de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) par somme et par multiplication par un scalaire.
2. Tout polynôme de degré pair $P = a_0 + a_1X + ... + a_{2r-1}X^{2r-1} + a_{2r}X^{2r}$ s'écrit comme la somme de $P_1 = a_0 + a_2X^2 + ... + a_{2r-2}X^{2r-2} + a_{2r}X^{2r} \in \mathcal{P}$ et de $P_2 = a_1 + a_3X^3 + ... + a_{2r-3}X^{2r-3} + a_{2r-1}X^{2r-1} \in \mathcal{I}$. (En fait, $P_1(X) = \dfrac{P(X) + P(-X)}{2}$ et $P_2(X) = \dfrac{P(X) - P(-X)}{2}$).

Exercice 14. Solution : C'est là l'un des premiers exemples d'espace vectoriel non standard.

1. Si $u, v \in \mathbb{R}$ alors, pour tous $r, s \in \mathbb{Q}$, $ru + sv \in \mathbb{R}$ donc $\mathbb{R}$ est un bien un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (!).
2. S'il existait un élément commun non nul $0 \neq e \in \mathbb{Q}\sqrt{2} \cap \mathbb{Q}$, alors on aurait $r, s \in \mathbb{Q}$ tels que $\sqrt{2}r = e = s$. On aurait alors $\sqrt{2} = \dfrac{s}{r} \in \mathbb{Q}$. Mais c'est alors un résultat classique que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Prouvons-le quand même.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}^*$ deux entiers premiers entre eux non nuls. En élevant au carré, on aurait que $2 = (\sqrt{2})^2 = (\dfrac{p}{q})^2$ d'où $q^2 = 2p^2$. Mais comme 2 est un *nombre premier* qui divise q^2 on sait qu'il divise nécessairement q. Ainsi $4 = 2^2$ diviserait alors à son tour $q^2 = 2p^2$ et donc $2|p$. Ceci est absurde car p et q sont supposés être premiers entre eux. Ainsi $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Autrement dit $\sqrt{2}$ est irrationnel.
En fin de compte on a prouvé que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}\sqrt{2} = \{0\}$.
3. Suppsons par l'absurde que $\mathbb{Q}\sqrt{3} \subset \mathbb{Q} \cdot \sqrt{2} + \mathbb{Q} \cdot 1$. On a alors $\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \cdot \sqrt{2} + \mathbb{Q} \cdot 1$ et donc il existe $r, s \in \mathbb{Q}$ tels que
$$\sqrt{3} = r\sqrt{2} + s$$
En élevant ceci au carrré, on en déduit que $3 = (\sqrt{2})^2 = (r\sqrt{2} + s)^2 = (2r^2 + s^2) + 2rs\sqrt{2}$. Il vient alors
$$2rs\sqrt{2} = 3 - (2r^2 + s^2) \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}\sqrt{2} = \{0\}$$
Donc $2rs = 0 = 3 - (2r^2 + s^2)$. En particulier, $r = 0$ ou $s = 0$. Mais si $r = 0$, alors $\sqrt{3} = s \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}\sqrt{3} = \{0\}$ (de la même façon qu'on a montré que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}\sqrt{2} = \{0\}$ on peut en effet montrer que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}\sqrt{3} = \{0\}$). Mais $\sqrt{3} = 0$ est absurde donc $r \neq 0$.
Si à l'inverse $s = 0$ alors $\sqrt{3} = r\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\sqrt{2} \cap \mathbb{Q}\sqrt{3} = \{0\}$ (toujours par une démonstration analogue). Ce qui est encore absurde donc $s \neq 0$.
Ainsi notre hypothèse de départ est contradictoire et donc $\mathbb{Q}\sqrt{3}$ n'est pas un sev de $\mathbb{Q} \cdot \sqrt{2} + \mathbb{Q} \cdot 1$.