Feuille 5

Matrices (Deuxième feuille)

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Exercice 1. Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire : $(S) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = b_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = b_3 \end{cases}$

1. Écrire la matrice A du système S , puis la matrice augmentée.
2. En faisant des opérations sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer en fonction de b l'ensemble des solutions.
3. Quel est le rang de S ?

Solution : 1. La matrice A et la matrice augmentée de S sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & b_2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & b_3 \end{array} \right).$$

2. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} L_1 \leftarrow -L_1 : & \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -b_1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & b_2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & b_3 \end{array} \right); & \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} : & \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -b_1 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & b_2 + b_1 \\ 0 & -2 & 10 & 6 & b_3 + 3b_1 \end{array} \right); \\ L_2 \leftarrow -L_2 : & \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -b_1 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -3 & -b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & 10 & 6 & b_3 + 3b_1 \end{array} \right); & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 : & \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -b_1 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -3 & -b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array} \right); \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 : & \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 7 & 5 & b_1 + 2b_2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -3 & -b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array} \right) =: (A'|b'). \end{aligned}$$

Le système S a une solution si et seulement si $b_3 - 2b_2 + b_1 = 0$; dans ce cas, les solutions de S sont exactement les solutions du système suivant :

$$(S') \begin{cases} x_1 = b_1 + 2b_2 - 7x_3 - 5x_4 \\ x_2 = -b_2 - b_1 + 5x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

où x_3 et x_4 sont des variables libres.

3. Le système S a même rang que le système équivalent S' , dont la matrice A' est échelonnée à deux lignes. Ainsi, le rang de S est égal à 2.

Exercice 2. Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire : $(S) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = b_3 \end{cases}$

1. Écrire la matrice B du système S , puis la matrice augmentée.
2. En faisant des opérations sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer en fonction de b l'ensemble des solutions.
3. Quel est le rang de S ?

Solution : 1. La matrice B et la matrice augmentée de S sont respectivement

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (B|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & b_2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & 1 & b_3 \end{array} \right).$$

2. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
 L_1 \leftarrow -L_1 : & \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -2 & -b_1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & b_2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & 1 & b_3 \end{array} \right); \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} : \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 10 & 6 & 7 & b_3 + 3b_1 \end{array} \right); \\
 L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 : & \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -2 & -b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}(b_2 + b_1) \\ 0 & 0 & 10 & 6 & 7 & b_3 + 3b_1 \end{array} \right); \quad L_3 \leftarrow L_3 - 10L_2 : \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & -2 & -b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}(b_2 + b_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array} \right); \\
 L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 : & \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}(3b_2 - 2b_1) \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}(b_2 + b_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array} \right); \\
 \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{5}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{5}L_3 \end{cases} : & \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5}(b_3 + b_2 - b_1) \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5}(-3b_3 + 7b_2 - 2b_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array} \right) =: (B'|b').
 \end{aligned}$$

Les solutions de $\mathcal{S}$ sont exactement les solutions du système suivant :

$$(\mathcal{S}') \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(3b_2 - 2b_1) - 2x_2 - \frac{4}{5}x_4 \\ x_3 = \frac{1}{5}(b_2 + b_1) - \frac{3}{5}x_4 \\ x_5 = b_3 - 2b_2 + b_1 \end{cases}$$

où x_2 et x_4 sont des variables libres.

3. Le système $\mathcal{S}$ a même rang que le système équivalent $\mathcal{S}'$, dont la matrice B' est échelonnée à trois lignes. Ainsi, le rang de $\mathcal{S}$ est égal à 3.

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 2 \\ -x + y + 7z + 2t = 3 \\ 2x + y - 8z + t = 4 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x + y - 3z - 4t = -1 \\ 2x + 2y + 2z - 3t = 2 \\ 3x + 6y - 2z + t = 8 \\ 2x + y + 5z + t = 5 \end{cases} \\
 (\mathcal{S}_3) \begin{cases} x - y + z + t = 3 \\ 5x + 2y - z - 3t = 5 \\ -3x - 4y + 3z + 2t = 1 \\ 6x + y - 2t = 8 \end{cases}$$

Solution : Pour résoudre ces systèmes on utilise la méthode du pivot de Gauss.

Résolution du système $\mathcal{S}_1$:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases} : & \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z + t = 1 \\ y + 2z - 2t = 1 \\ 3y + 6z + 3t = 4 \\ -3y - 6z - t = 2 \end{cases} \\
 \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{cases} : & \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z + t = 1 \\ \boxed{y} + 2z - 2t = 1 \\ 9t = 1 \\ -7t = 5 \end{cases} \\
 L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3 : & \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z + t = 1 \\ \boxed{y} + 2z - 2t = 1 \\ \boxed{t} = \frac{1}{9} \\ -7t = 5 \end{cases} \\
 L_4 \leftarrow L_4 + 7L_3 : & \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z + t = 1 \\ \boxed{y} + 2z - 2t = 1 \\ \boxed{t} = \frac{1}{9} \\ 0 = \frac{52}{9} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le système $\mathcal{S}_1$ n'a pas de solution.

Résolution du système $\mathcal{S}_2$:

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \right. : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + y - 3z - 4t = -1 \\ \phantom{\boxed{x}} + + 8z + 5t = 4 \\ \phantom{\boxed{x}} + 3y + 7z + 13t = 11 \\ \phantom{\boxed{x}} - y + 11z + 9t = 7 \end{array} \right. \\
 \\
 L_2 \leftrightarrow L_4 : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + y - 3z - 4t = -1 \\ \phantom{\boxed{x}} - y + 11z + 9t = 7 \\ \phantom{\boxed{x}} + 3y + 7z + 13t = 11 \\ \phantom{\boxed{x}} + + 8z + 5t = 4 \end{array} \right. \\
 \\
 L_2 \leftarrow -L_2 : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + y - 3z - 4t = -1 \\ \phantom{\boxed{x}} + \boxed{y} - 11z - 9t = -7 \\ \phantom{\boxed{x}} + 3y + 7z + 13t = 11 \\ \phantom{\boxed{x}} + + 8z + 5t = 4 \end{array} \right. \\
 \\
 L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + y - 3z - 4t = -1 \\ \phantom{\boxed{x}} + \boxed{y} - 11z - 9t = -7 \\ \phantom{\boxed{x}} + + 40z + 40t = 32 \\ \phantom{\boxed{x}} + + 8z + 5t = 4 \end{array} \right. \\
 \\
 L_3 \leftarrow \frac{1}{40}L_3 : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + y - 3z - 4t = -1 \\ \phantom{\boxed{x}} + \boxed{y} - 11z - 9t = -7 \\ \phantom{\boxed{x}} + + \boxed{z} + t = \frac{4}{5} \\ \phantom{\boxed{x}} + + 8z + 5t = 4 \end{array} \right. \\
 \\
 L_4 \leftarrow L_4 - 8L_3 : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + y - 3z - 4t = -1 \\ \phantom{\boxed{x}} + \boxed{y} - 11z - 9t = -7 \\ \phantom{\boxed{x}} + + \boxed{z} + t = \frac{4}{5} \\ \phantom{\boxed{x}} + - 3t = -\frac{12}{5} \end{array} \right. \\
 \\
 L_4 \leftarrow -\frac{1}{3}L_4 : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + y - 3z - 4t = -1 \\ \phantom{\boxed{x}} + \boxed{y} - 11z - 9t = -7 \\ \phantom{\boxed{x}} + + \boxed{z} + t = \frac{4}{5} \\ \phantom{\boxed{x}} + + \boxed{t} = \frac{4}{5} \end{array} \right. \\
 \\
 L_1 \leftarrow L_1 - L_2 : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + + 8z + 5t = 6 \\ \phantom{\boxed{x}} + \boxed{y} - 11z - 9t = -7 \\ \phantom{\boxed{x}} + + \boxed{z} + t = \frac{4}{5} \\ \phantom{\boxed{x}} + + + \boxed{t} = \frac{4}{5} \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 11L_3 \end{array} \right. : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + - 3t = -\frac{2}{5} \\ \phantom{\boxed{x}} + \boxed{y} + 2t = \frac{9}{5} \\ \phantom{\boxed{x}} + + \boxed{z} + t = \frac{4}{5} \\ \phantom{\boxed{x}} + + + \boxed{t} = \frac{4}{5} \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{array} \right. : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} = 2 \\ \phantom{\boxed{x}} + \boxed{y} = \frac{1}{5} \\ \phantom{\boxed{x}} + + \boxed{z} = 0 \\ \phantom{\boxed{x}} + + + \boxed{t} = \frac{4}{5} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Le système $\mathcal{S}_2$ a exactement une solution : $t = \frac{4}{5}$, $z = 0$, $y = \frac{1}{5}$, $x = 2$.

Résolution du système $\mathcal{S}_3$:

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1 \end{array} \right. : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} - y + z + t = 3 \\ 7y - 6z - 8t = -10 \\ -7y + 6z + 5t = 10 \\ 7y - 6z - 8t = -10 \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \right. : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} - y + z + t = 3 \\ 7y - 6z - 8t = -10 \\ -3t = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{array} \right. : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} - y + z + t = 3 \\ \boxed{y} - \frac{6}{7}z - \frac{8}{7}t = -\frac{10}{7} \\ \boxed{t} = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{8}{7}L_3 \end{array} \right. : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} - y + z = 3 \\ \boxed{y} - \frac{6}{7}z = -\frac{10}{7} \\ \boxed{t} = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 L_1 \leftarrow L_1 + L_2 : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + \frac{1}{7}z = \frac{11}{7} \\ \boxed{y} - \frac{6}{7}z = -\frac{10}{7} \\ \boxed{t} = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Les solutions du système $\mathcal{S}_3$ sont $(x, y, t, z) = (\frac{11}{7} - \frac{1}{6}z, -\frac{10}{7} + \frac{6}{7}z, 0, z)$, où z est une variable libre.

Exercice 4. Trouver trois nombres réels α , β et γ tels que, pour tout polynôme P de degré 3,

$$\int_2^4 P(t) dt = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Solution : Notons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ le polynôme générique de degré 3. On a :

$$\int_2^4 P(t) dt = \left[a \frac{t^4}{4} + b \frac{t^3}{3} + c \frac{t^2}{2} + dt \right]_2^4 = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d$$

et

$$\begin{aligned}
 \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) &= \alpha(8a + 4b + 2c + d) + \beta(27a + 9b + 3c + d) + \gamma(64a + 16b + 4c + d) \\
 &= (8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d.
 \end{aligned}$$

Pour avoir l'égalité recherchée pour tout polynôme P de degré 3, il faut et il suffit que, pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$,

$$(8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d,$$

ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 6 \\ 4\alpha + 9\beta + 16\gamma = \frac{56}{3} \\ 8\alpha + 27\beta + 64\gamma = 60 \end{cases}$$

Utilisons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 8L_1 \end{cases} : \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 12 & \frac{32}{3} \\ 0 & 19 & 56 & 44 \end{array} \right); \quad \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 19L_2 \end{cases} : \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 18 & 6 \end{array} \right);$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 : \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 18 & 6 \end{array} \right); \quad \begin{cases} L_4 \leftarrow L_4 - 18L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases} : \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Il existe donc exactement une solution : $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

Exercice 5. Résoudre en fonction du paramètre réel m les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 2x + 3y - 5z = m \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x + 3y - 2z = 2 \\ 7x - 4y - m^2z = m - 4 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_3) \begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m - 2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m - 1 \end{cases}$$

Solution : Résolution du système $\mathcal{S}_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & m \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & m-2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array} \right)$$

Si $m \neq 1$, $\mathcal{S}_1$ n'a pas de solutions. Sinon, ses solutions sont $(x, y, z) = (-1 + z, 1 + z, z)$, où z est une variable libre.

Résolution du système $\mathcal{S}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 7 & -4 & -m^2 & m-4 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & -25 & -m^2 + 14 & m-18 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -m^2 + 9 & m-3 \end{array} \right)$$

Si $m = -3$, $\mathcal{S}_2$ n'a pas de solution.

Si $m = 3$, les solutions de $\mathcal{S}_2$ sont $(x, y, z) = (\frac{1}{5} + \frac{7}{5}z, \frac{3}{5} + \frac{1}{5}z, z)$, où z est une variable libre.

Supposons $m \notin \{-3, 3\}$ et poursuivons les opérations sur la matrice augmentée de $\mathcal{S}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{m+3} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & \frac{2m+4}{m+3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3m+8}{5(m+3)} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{m+3} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{m-4}{5(m+3)} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3m+8}{5(m+3)} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{m+3} \end{array} \right)$$

Dans ce cas, le système $\mathcal{S}_2$ a exactement une solution : $(x, y, z) = (\frac{m-4}{5(m+3)}, \frac{3m+8}{5(m+3)}, -\frac{1}{m+3})$.

Résolution du système $\mathcal{S}_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ -2 & 1 & m-2 & 1 \\ m & 1 & 2 & 2m-1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ 0 & 2m+1 & m+2 & 2m+1 \\ 0 & -m^2+1 & 2m-2 & -m^2+2m-1 \end{array} \right)$$

Si $m = 1$, la matrice augmentée de $\mathcal{S}_3$ est équivalente à $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array} \right)$ et les solutions de $\mathcal{S}_3$ sont $(x, y, z) = (-z, 1 - z, z)$, où z est une variable libre.

Si $m = -1$, la matrice augmentée de $\mathcal{S}_3$ est équivalente à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \right)$$

et $\mathcal{S}_3$ a exactement une solution : $(x, y, z) = (0, 1, 0)$.

Supposons $m \notin \{-1, 1\}$ et poursuivons les opérations sur la matrice augmentée de $\mathcal{S}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ 0 & -m^2+1 & 2m-2 & -m^2+2m-1 \\ 0 & 2m+1 & m+2 & 2m+1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{2}{m+1} & \frac{m-1}{m+1} \\ 0 & 0 & \frac{m^2+7m+4}{m+1} & \frac{4m+2}{m+1} \end{array} \right)$$

Si $m = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$, $\mathcal{S}_3$ n'a pas de solution.

Sinon, la matrice augmentée de $\mathcal{S}_3$ est équivalente à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 2 & m \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{2}{m+1} & \frac{m-1}{m+1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4m+2}{m^2+7m+4} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & m & 0 & \frac{m^3+7m^2-4m-4}{m^2+7m+4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{m(m+5)}{m^2+7m+4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4m+2}{m^2+7m+4} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{2(m^2-2m-2)}{m^2+7m+4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{m(m+5)}{m^2+7m+4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4m+2}{m^2+7m+4} \end{array} \right)$$

et $\mathcal{S}_3$ a exactement une solution : $(x, y, z) = \left(\frac{2(m^2-2m-2)}{m^2+7m+4}, \frac{m(m+5)}{m^2+7m+4}, \frac{4m+2}{m^2+7m+4} \right)$.

Exercice 6 (Inversion d'une matrice carrée). Soit $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. On considère les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} -8x_1 - 8x_2 = b_1 \\ 7x_1 + 9x_2 + 9x_3 = b_2 \\ -8x_1 - x_2 - x_3 = b_3 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = b_1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = b_2 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = b_3 \end{cases}$$

Les résoudre pour $b = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Que peut-on en déduire sur les matrices des deux systèmes ?

Solution : Comme la méthode du pivot de Gauss ne dépend que de la matrice du système, et non pas des termes connus, on va considérer les matrices augmentées

$$(A_1|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad (A_2|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

où A_1 (resp. A_2) est la matrice du système $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) et I est la matrice identité de taille 3.

Résolution des systèmes $\mathcal{S}_1$:

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow -\frac{1}{8}L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1 \end{cases} : \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & \frac{7}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right); \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -7L_2 \end{cases} : \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{9}{2} & \frac{7}{16} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{16} & -\frac{7}{2} & 1 \end{array} \right);$$

$$\begin{cases} L_3 \leftarrow -\frac{2}{65}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{9}{2}L_3 \end{cases} : \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{65} & \frac{9}{65} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{8} & \frac{7}{65} & -\frac{2}{65} \end{array} \right); \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 : \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{65} & -\frac{9}{65} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{65} & \frac{9}{65} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{8} & \frac{7}{65} & -\frac{2}{65} \end{array} \right).$$

Le système $\mathcal{S}_1$ avec $b = (1, 0, 0)$ a exactement une solution : $(x_{11}, x_{21}, x_{31}) := (0, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$. De même, les systèmes $\mathcal{S}_1$ avec $b = (0, 1, 0)$ et $b = (0, 0, 1)$ ont chacun exactement une solution, respectivement $(x_{12}, x_{22}, x_{32}) := (-\frac{1}{65}, \frac{1}{65}, \frac{7}{65})$ et $(x_{13}, x_{23}, x_{33}) := (-\frac{9}{65}, \frac{9}{65}, -\frac{2}{65})$. Notons X la matrice formée par les x_{ij} : elle satisfait l'équation matricielle $A_1 X = I$, donc $X = A_1^{-1}$ et A_1 est inversible.

Résolution des systèmes $\mathcal{S}_2$:

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 : \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} : \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Les systèmes n'ont pas de solution. Ainsi, il n'existe pas de matrice (carrée) X telle que $AX = I$, autrement dit la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 7 (Inversion d'une matrice carrée). En résolvant un système linéaire, inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : Pour inverser la matrice A on résout le système $AX = Y$, où l'on a posé $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$AX = Y \iff \begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\iff \begin{cases} x + y + z = a \\ x + 0 + 0 = b - a \\ 0 + y + 0 = c - a \end{cases}$$

On trouve donc $x = b - a$, $y = c - a$ et $z = 3a - b - c$. Ainsi, en considérant les solutions pour $Y = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit k un nombre réel et soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - k \\ 3 \\ 1 + k^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k^2 - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^4$. Déterminer pour quelles valeurs de k le vecteur w s'écrit sous la forme $av_1 + bv_2 + cv_3$ pour des nombres réels a, b et c .

Solution : Le vecteur w s'écrit sous la forme $av_1 + bv_2 + cv_3$ pour des nombres réels a, b et c si et seulement si le système linéaire suivant admet une solution :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ a - b + (1 - k)c = 2 \\ a + 2b + 3c = k^2 - 1 \\ a + b + (1 + k^2)c = 1 \end{cases}$$

Utilisons la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 - k & 2 \\ 1 & 2 & 3 & k^2 - 1 \\ 1 & 1 & 1 + k^2 & 1 \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 - k & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k^2 - 2 \\ 0 & 0 & -11 + k^2 & 0 \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & k^2 - 2 \\ 0 & 0 & 1 - k & 2k^2 - 3 \\ 0 & 0 & -11 + k^2 & 0 \end{array} \right)$$

Si $k = 1$, $\mathcal{S}$ n'a pas de solution.

Supposons $k \neq 1$ et poursuivons les opérations sur la matrice augmentée de $\mathcal{S}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & k^2 - 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2k^2 - 3}{1 - k} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(11 - k)(2k^2 - 3)}{1 - k} \end{array} \right) \quad (1)$$

Si $k \notin \left\{ -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 11 \right\}$, $\mathcal{S}$ n'a pas de solution.

Sinon, $\mathcal{S}$ a exactement une solution : $(a, b, c) = \left(\frac{k^3 - 5k^2 - 3k + 9}{1 - k}, \frac{-k^3 - k^2 + 2k + 1}{1 - k}, \frac{2k^2 - 3}{1 - k} \right)$.