Feuille 4
Matrices (Première feuille)

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Exercice 1 ((C) Produits de matrices)**.** On considère : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? Les calculer.

Solution : En regardant les tailles des matrices, les produits qu'on peut former sont AX, BX, DZ, AB, BA, AA, BB, DD.

Le calcul donne $AX = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $BX = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $DZ = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$;

puis $AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $AA = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $BB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

enfin $DD = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 14 \\ 11 & 11 & 14 \\ 11 & 9 & 16 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Matrices de rotation)**.** Soit θ un nombre réel. On considère la matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. On considère un vecteur non nul $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $v = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$.
2. Calculer $R_\theta \cdot v$.
3. Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $v \to R_\theta v$ est la rotation de centre 0 et d'angle θ.
4. On considère un autre nombre réel θ'. Calculer $R_\theta R_{\theta'}$. Quelle est l'application de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ correspondante ?

Solution :

1. Posons $z = a + ib$. En posant $r = |z|$ et $\phi = \arg(z)$, on a $z = re^{i\phi}$, puis $a = \mathrm{Re}(z) = r\cos(\phi)$ et $b = \mathrm{Im}(z) = r\sin(\phi)$.
2. On calcule $R_\theta v = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)) \\ r(\cos(\phi)\sin(\theta) + \sin(\phi)\cos(\theta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi+\theta) \\ r\sin(\phi+\theta) \end{pmatrix}$.
On remarque qu'il est bon de connaître ses formules de trigonométrie.
3. Revenons à la notation complexe. En posant $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = R_\theta v$ et $w = c + id$, d'après les questions 1 et 2 nous avons que $z = re^{i\phi}$ et $w = re^{i(\phi+\theta)} = e^{i\phi}z$. La distance entre v et 0, qui vaut r, est donc la même que celle entre $R_\theta v$ et 0, et l'angle entre v et $R_\theta v$ est égal à ϕ. L'application $v \to R_\theta v$ est donc la rotation de centre 0 et angle θ.

4. Option 1 : On calcule :
$R_\theta R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \cos(\theta')\cos(\theta) - \sin(\theta')\sin(\theta) & -(\cos(\theta')\sin(\theta) + \sin(\theta')\cos(\theta)) \\ \cos(\theta')\sin(\theta) + \sin(\theta')\cos(\theta) & \cos(\theta')\cos(\theta) - \sin(\theta')\sin(\theta) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}$
Option 2 : la rotation de centre 0 et d'angle θ suivie de la rotation de centre 0 et d'angle θ' est la rotation de centre 0 et d'angle $\theta+\theta'$. Donc $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.

Exercice 3 (Identités remarquables ?)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA.
2. Calculer $(A+B)^2$.
3. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et $A^2 + AB + BA + B^2$ et conclure.

Solution :

1. On a $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On a $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
3. On a aussi $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On calcule donc $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = (A+B)^2$.
Bilan : les identités remarquables ne sont plus vraies avec des matrices. De fait, elles ne marchent que si $AB = BA$.

Exercice 4 (Puissance n-ième)**.** On considère une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (a et b réels) et la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer par récurrence les puissances n-ièmes D^n et T^n.
2. Calculer la matrice $X = D + T - \mathrm{I}_2$.
3. Montrer que $X^n = \begin{pmatrix} a^n & (X^n)_{12} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, avec $(X^n)_{12} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}$.

Solution :

1. Montrons, par récurrence sur $n \geq 1$, que $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ et $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Initialisation : Lorsque $n = 1$, on a bien $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ et $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $D^{n+1} = D^n D = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$. De plus, $T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On a $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

3. Posons $c_n = (X^n)_{12}$. Montrons, par récurrence sur $n \geq 1$, que $X^n = \begin{pmatrix} a^n & c_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, avec $(X^n)_{12} = c_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}$.

   Initialisation : On a bien $X^1 = X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Donc $X_{12} = c_1 = 1$.

   Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $X^n = \begin{pmatrix} a^n & c_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ avec $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}$.

   On calcule alors $X^{n+1} = X^n X = \begin{pmatrix} a^n & c_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n + bc_n + \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$. On a donc $c_{n+1} = a^n + b \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1} = a^n + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i} = \sum_{i=0}^{(n+1)-1} a^i b^{(n+1)-i-1}$.

Exercice 5 (Produit de matrices élémentaires)**.**

1. Calculer un produit de matrices élémentaires $E_{ij}E_{kl}$.
2. Pour une matrice carrée quelconque A, calculer AE_{kl} et $E_{ij}A$

Solution :

1. On a $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, où δ_{jk} est le symbole de Kronecker : $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ et 0 sinon.
2. En écrivant la matrice A par lignes $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ alors $E_{ij}A = \begin{pmatrix} L'_1 \\ \vdots \\ L'_n \end{pmatrix}$ où $L'_i = L_j$ et $L'_k = 0$ si $k \neq i$.

   En écrivant la matrice A par colonnes $A = [C_1, \dots, C_n]$, alors $AE_{kl} = [C'_1, \dots, C'_n]$ où $C'_l = C_k$ et $C'_i = 0$ si $i \neq l$.

Exercice 6. (C) Dans $M_{3,4}(\mathbb{R})$ soient $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice ${}^tA$ puis calculer $B\,{}^tA$.

Solution : On a ${}^tA = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, puis $B\,{}^tA = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 14 \\ -12 & -4 & 4 \\ -6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

Exercice 7 (La transposée)**.** Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,r}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. (Calculer le terme d'indice (i,j) de chaque matrice.)
2. Pour tout i, j, calculer $(A\,{}^tA)_{ij}$. En déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A\,{}^tA = 0$ alors $A = 0$.

Solution :

1. Le produit AB existe et est une matrice de taille $p \times r$. Soient $i \in [|1,p|]$ et $j \in [|1,r|]$. On a $({}^t(AB))_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=0}^{n} A_{jk}B_{ki}$. D'autre part, le produit ${}^tB\,{}^tA$ existe aussi et est une matrice de taille $p \times r$. On a $({}^tB\,{}^tA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk} = ({}^t(AB))_{ij}$.

   On en déduit que ${}^t(AB)$ et ${}^tB\,{}^tA$ sont deux matrices de taille $p \times r$ qui ont les mêmes coefficients. Elles sont donc égales.

2. On a $(A\,{}^tA)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} A_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=0}^{n} A_{ik}A_{jk}$. En particulier, si $i = j$, alors $(A\,{}^tA)_{ii} = \sum_{k=0}^{n} A_{ik}^2$, qui est une somme de carrés. Si $A\,{}^tA = 0$, cette somme est nulle, et donc tous les termes sont nuls eux aussi. Ceci veut dire que pour tous i, j, $A_{ij} = 0$, i.e. $A = 0$.

Exercice 8 (La trace). Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, A et B dans $M_n(\mathbb{K})$.

1. Calculer tr $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que pour tous s et t dans $\mathbb{K}$, on a $\mathrm{tr}(sA + tB) = s\mathrm{tr}(A) + t\mathrm{tr}(B)$.
3. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
4. Calculer $\mathrm{tr}(A\,{}^tA)$.
5. En déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $\mathrm{tr}(A\,{}^tA) \geq 0$ et que ça vaut 0 si et seulement si $A = 0$.

Solution :

1. On a tr $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = 1 + 10 = 11$.
2. Soient $s, t \in \mathbb{K}$. On a $\mathrm{tr}(sA + tB) = \sum_{i=1}^{n}(sA + tB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(sA)_{ii} + (tB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} s(A)_{ii} + t(B)_{ii} = s\sum_{i=1}^{n} A_{ii} + t\sum_{i=1}^{n} B_{ii} = s\mathrm{tr}(A) + t\mathrm{tr}(B)$.
3. On a $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ji}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} B_{ji}A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = \mathrm{tr}(BA)$.
4. On a $\mathrm{tr}(A{}^tA) = \sum_{i=1}^{n}(A{}^tA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}({}^tA)_{ji}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2$.
5. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, d'après la question 4, $\mathrm{tr}(A\,{}^tA)$ s'exprime comme une somme de carrés : elle est donc positive. De plus, $\mathrm{tr}(A\,{}^tA) = 0$ si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls, c'est-à-dire que pour tous $i, j \in [|1, n|]$, $A_{ij} = 0$. Ceci arrive si et seulement si $A = 0$.

Exercice 9 ((*) Une matrice remarquable). Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 1 + a^2 & ab & ac \\ ab & 1 + b^2 & bc \\ ac & bc & 1 + c^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = M - I_3.$$

1. Montrer que N peut s'écrire comme produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.
2. Calculer N^n, où n désigne un entier naturel.
3. En déduire l'expression de M^n.

Solution :

1. On a $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.
2. On commence par remarquer que $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2$, qui est un scalaire. On va utiliser l'associativité du produit de matrices pour le calcul.
   On a $N^n = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a^2+b^2+c^2)^{n-1} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2)^{n-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2)^{n-1}N = N$.
   Le calcul est légèrement plus simple en simplifiant directement les $a^2 + b^2 + c^2$.

3. Solution 1 : Montrons, par récurrence sur $n \geq 1$, que $M^n = I_3 + (2^n - 1)N$.
Initialisation : Si $n = 1$, on a bien $M^n = M = I_3 + N$.
Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $M^n = I_3 + (2^n - 1)N$. Calculons M^{n+1}. On a $M^{n+1} = M^n M = (I_3 + (2^n - 1)N)(I_3 + N) = I_3 + (2^n - 1)N + N + (2^n - 1)N^2 = I_3 + (2^n - 1 + 1 + 2^n - 1)N = I_3 + (2^{n+1} - 1)N$.
Solution 2 : Puisque $NI_3 = I_3N = N$, on peut développer le produit $(I_3 + N)^n$ à l'aide du binôme de Newton. On a $(I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = I_3 + (\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k})N = I_3 + ((1 + 1)^n - 1)\, N = I_3 + (2^n - 1)N$.

Exercice 10 (La suite de Fibonacci)**.** On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit k un entier naturel.

1. Calculer par récurrence, en termes des éléments de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la valeur de $M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Exprimer les coefficients de M^k en termes de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (*) Comment doit-on adapter la matrice M pour voir apparaître une suite récurrente d'ordre 2 autre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Solution :

1. Montrons, par récurrence sur $k \geq 0$, que $M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$

   Initialisation : Pour $k = 0$, on a bien $M^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$

   Hérédité : Soit $k \geq 0$ tel que $M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$. On a alors $M^{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M(M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = M \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k + f_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_{k+2} \end{pmatrix}$.

2. D'après la question 1, $M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$, donc la deuxième colonne de M^k est $\begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$. Or, puisque $M^{k+1} = M^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, la deuxième colonne de M^k est égale à la première colonne de M^{k+1}. On déduit que, si $k \geq 0$, on a $M^k = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{pmatrix}$.

3. La matrice à considérer pour une suite définie par $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$. Ainsi, $A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ au_{n+1} + bu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.