Feuille 2
Suites Numériques

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Exercice 1 (Retour sur les sommes de suites géométriques)**.** On revient sur les sommes

$$S_1(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{i\,k\,\theta}, \qquad S_2(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\,i\,k\,\theta}$$

définies dans un exercice de la feuille 1. On pose $S_3(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\,\theta)$ et $S_4(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\,\theta)$.

1. Exprimer $S_3(\theta)$ et $S_4(\theta)$ en fonction de $S_1(\theta)$.
2. En déduire leur valeur en fonction de θ.
3. Montrer que $S_2(\theta) = 2S_3(2\theta) + 1$ et retrouver sa valeur en fonction de n sans calculs.

Solution :

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\cos(k\theta) = \dfrac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2}$, donc

$$S_3(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ik\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(S_1(\theta) + \overline{S_1(\theta)} - 2\right) = \Re(S_1(\theta)) - 1.$$

De même,

$$S_4(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(S_1(\theta) - \overline{S_1(\theta)}\right) = \Im(S_1(\theta)).$$

2. Si θ est un multiple entier de 2π, autrement dit, si $e^{i\theta} = 1$, alors $S_1(\theta) = n + 1$. Dans ce cas, $S_3(\theta) = n$ et $S_4(\theta) = 0$.

Si θ n'est pas un multiple de 2π, on a trouvé l'expression $S_1(\theta) = \dfrac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$. On en cherche une expression cartésienne : on peut multiplier en haut et en bas par le conjugué du dénominateur, ou encore, vue l'expression de $S_1(\theta)$, factoriser en haut et en bas comme suit :

$$S_1(\theta) = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\right)}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)} \cdot \left(\cos(\frac{n\theta}{2}) + i\sin(\frac{n\theta}{2})\right).$$

Finalement, cela donne :

$$S_3(\theta) = \frac{\cos(\frac{n\theta}{2})\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)} - 1 \qquad \text{et} \quad S_4(\theta) = \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}.$$

3. Comme à la question 1 on écrit $2S_3(2\theta) = \sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} + \sum_{k=1}^{n} e^{-2ik\theta}$.

Par changement d'indice, on a $\sum_{k=1}^{n} e^{-2ik\theta} = \sum_{k=-n}^{-1} e^{2ik\theta}$. Donc

$$2S_3(2\theta) = \sum_{k=-n}^{-1} e^{2ik\theta} + \sum_{k=1}^{n} e^{2ik\theta} + 1 - 1 = \sum_{k=-n}^{n} e^{2ik\theta} - 1,$$

d'où l'égalité $S_2(\theta) = 2S_3(2\theta) + 1$.

À la question précédente, on aurait aussi pu mener le calcul de la façon suivante :

$$S_1(\theta) = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = e^{-i\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{-2i\sin(\theta/2)} = i\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{2n+1}{2}\theta}}{2\sin(\theta/2)}.$$

On aurait ainsi trouvé

$$S_3(\theta) = \frac{-\Im\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{2n+1}{2}\theta}\right)}{2\sin(\theta/2)} - 1 = \frac{\sin(\theta/2) + \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{2\sin(\theta/2)} - 1.$$

L'égalité ci-dessus nous redonne donc l'expression :

$$S_2(\theta) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Exercice 2 ((C) Suites extraites)**.**

1. Considérons la suite $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Extraire une sous-suite convergente.
2. Considérons la suite $\left(n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Extraire une sous-suite strictement monotone.

Solution :

1. La sous-suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1. Elle est donc convergente.
2. Pour tout n, $u_{6n} = 6n$. La sous-suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Exercice 3 (Le théorème de Cesaro)**.** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$. On définit la suite v par :

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que la suite v converge elle aussi vers ℓ.

Solution : On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$. Choisissons donc un réel $\varepsilon > 0$, et cherchons à montrer qu'à partir d'un certain rang, $|v_n - \ell|$ est plus petit que ε (ou que 3ε, ce qui est aussi bien).
Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Or, pour tout $n \geq 0$, on peut écrire : $v_n - \ell = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell)$. Pour $n \geq n_0$, découpons la somme en deux parties :

$$v_n - \ell = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - \ell) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}(u_k - \ell).$$

Par inégalité triangulaire, puis l'inégalité mentionnée plus haut, valable pour tous les termes au-delà de n_0 :

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}\varepsilon = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k - \ell| + \frac{n - n_0 + 1}{n+1}\varepsilon,$$

donc

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k - \ell| + \varepsilon.$$

On ne peut pas majorer le premier des deux termes directement, puisqu'on ne sait rien sur les $n_0 - 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. En revanche, ε, puis n_0 sont maintenant fixés. Lorsque n tend vers $+\infty$, le comportement du terme de gauche est dicté par la fraction $\dfrac{1}{n+1}$; on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| = 0.$$

Ainsi, il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| < \varepsilon$.

Finalement, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$ on a :

$$|v_n - \ell| < 2\varepsilon.$$

On a montré que quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang à partir duquel $|v_n - \ell| < 2\varepsilon$; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 4 (Sommes télescopiques)**.** Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

1. En utilisant l'égalité $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
2. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est croissante, puis montrer qu'elle est convergente.

<u>Solution</u> :

1. D'après l'égalité proposée, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

   Par changement d'indice dans la deuxième somme, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$, ainsi, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$.
   Dans cette différence de sommes, presque tous les termes se compensent, et il reste : $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.
   De cette expression, on voit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

2. Pour tout $n \geq 1$, on a $T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$: la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
   Or, pour tout $k \geq 1$ on a $\dfrac{1}{k(k+1)} \geq \dfrac{1}{(k+1)^2}$, donc pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2},$$

   d'où $S_n + 1 \geq T_n$.
   La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ étant convergente, elle est bornée : il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq M$ (en constatant que $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante, on constate que $M = 1$ convient). Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $T_n \leq M + 1$. Finalement, la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est croissante, et elle est majorée. D'après un théorème du cours, elle est donc convergente.

Exercice 5 (Moyenne arithmético-géométrique)**.** On fixe a et b deux réels strictement positifs. On définit deux suites u et v par :

$$u_0 = \frac{a+b}{2} \text{ et } \frac{1}{v_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \text{ ; puis pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$.
2. En déduire que u est décroissante et v est croissante.
3. Montrer qu'elles sont toutes les deux convergentes et qu'elles ont la même limite.

Solution :

1. L'expression $\frac{1}{v_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ est équivalente à : $v_0 = \frac{2ab}{a+b}$; de même pour v_n.
   Commençons donc par montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, on a les inégalités
   $$(*) \qquad \frac{x+y}{2} \geq \frac{2xy}{x+y} > 0.$$
   D'abord, si x et y sont strictement positifs, alors $\frac{2xy}{x+y}$ est bien défini et est strictement positif. Ensuite, on a $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, donc $(x+y)^2 \geq 4xy$, d'où $\frac{x+y}{2} \geq \frac{2xy}{x+y}$.
   Nous sommes maintenant en mesure de montrer par récurrence la propriété suivante :
   P_N : "Les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont bien définies au moins jusqu'au rang N, et u_N, v_N sont dans $\mathbb{R}_+^\star$".
   — L'initialisation découle des inégalités $(*)$ appliquées à a et b ;
   — l'hérédité découle encore de $(*)$;
   — donc, par récurrence, P_N est vraie, quel que soit $N \geq 0$.
   Les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont donc bien définies, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$. Maintenant, pour tout $n \geq 0$, en appliquant les inégalités $(*)$ à u_{n-1} et v_{n-1}, ou à a et b si $n = 0$, on obtient : $u_n \geq v_n > 0$.
2. Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ donc $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$, d'après la question 1. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc décroissante.
   Et $v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$, donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_n + u_n}{u_n + v_n} \geq 1$, donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
3. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$, donc elle est minorée. Elle est donc convergente ; notons $\ell_u \geq 0$ sa limite. De plus, comme cette suite est décroissante, on a, pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq u_0$, donc d'après la question précédente on a $v_n \leq u_0$. Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est majorée, et elle est croissante. Donc elle est convergente ; notons ℓ_v sa limite.
   L'égalité $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ donne, par passage à la limite, l'égalité $\ell_u = \frac{\ell_u + \ell_v}{2}$, d'où $\ell_u = \ell_v$. Ainsi, les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ convergent toutes les deux vers une même limite.

Exercice 6 (La constante d'Euler)**.** On considère la suite $H = (H_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$H_n = \sum_1^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. On définit la suite H' par $H'_n = H_n - \frac{1}{n}$. Montrer que H et H' sont adjacentes. On note γ leur limite : c'est la constante d'Euler.
2. Montrer $0 < \gamma < 1$. (*Remarque : elle vaut approximativement 0,577215.*)

Solution :

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$, et $H'_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$.
   On a donc $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$, et $H'_{n+1} - H'_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$.
   Montrer la monotonie des suites H et H' revient donc à comparer $\ln(n+1) - \ln n$ avec $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$.
   Or, on a $\ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$. Et pour tout $t \in [n, n+1]$ on a $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$, puisque la

fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Par positivité et linéarité de l'intégrale, cela nous donne : $\int_n^{n+1} \frac{dt}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n}$, autrement dit : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.
On a donc $H_{n+1} - H_n \leq 0$ et $H'_{n+1} - H'_n \geq 0$: la suite H est décroissante, et la suite H' est croissante. De plus, on a évidemment $\lim_{n \to +\infty} H_n - H'_n = 0$; nos deux suites sont donc adjacentes. D'après un théorème du cours, elles sont donc toutes les deux convergentes, vers une même limite.

2. On a $H_1 = 1$ et $H'_1 = 0$. Comme la suite H est décroissante et converge vers γ, et que la suite H' est croissante et converge aussi vers γ, on a donc les inégalités $0 \leq \gamma \leq 1$. Pour obtenir des inégalités strictes, on peut soit remarquer que, en suivant les arguments ci-dessus, les monotonies de H et H' sont strictes, soit calculer H_2 et H'_2. Comme $\ln 2 > \frac{1}{2}$, on a bien $H_2 < 1$ et $H'_2 > 0$.

Exercice 7 ((*) Convergence et suites extraites)**.** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes, et $\ell \in \mathbb{C}$. On considère les deux affirmations suivantes :

P : la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ ;

Q : toute suite extraite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet elle-même une suite extraite convergeant vers ℓ.

On souhaite montrer que P et Q sont équivalentes.

1. Montrer que $P \Rightarrow Q$.
2. Rappeler la définition de la convergence des suites, et écrire la négation de l'affirmation P.
3. Montrer, par contraposée, que $Q \Rightarrow P$.

Solution :

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ. Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ une suite extraite. D'après un théorème du cours, cette suite converge aussi vers ℓ. D'après ce même théorème, toutes les suites extraites de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ convergent donc vers ℓ, ce qui prouve Q. Ainsi, $P \Rightarrow Q$.
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. La négation de l'affirmation P est donc l'affirmation suivante :
"non P" : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \geq 0$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - \ell| > \varepsilon$.
3. Supposons donc l'affirmation "non P" ci-dessus, et, pour démontrer "non Q", construisons une extraction $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ ne contienne aucune suite extraite convergenant vers ℓ.
Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \geq 0$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - \ell| > \varepsilon$. Fixons ce réel $\varepsilon > 0$.
Comme, pour tout n_0, il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - \ell| > \varepsilon$, l'ensemble des indices n pour lesquels $|u_n - \ell| > \varepsilon$ est infini, et on peut y extraire une suite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
Plus précisément, construisons une extraction φ par récurrence, de sorte que pour tout $n \geq 0$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon$.
Initialisation : Avec $n_0 = 0$ dans l'énoncé de "non P", on trouve un indice n tel que $|u_n - \ell| > \varepsilon$. Posons $\varphi(0) = n$.
Hérédité : Supposons construits, jusqu'à un certain n, les éléments $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$, tels que $\varphi(k) < \varphi(k+1)$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, et tels que pour tout k, $|u_{\varphi(k)} - \ell| > \varepsilon$. Construisons cette fonction φ jusqu'au rang $n+1$. On applique l'énoncé "non P" à $n_0 = \varphi(n) + 1$: cela fournit un indice, notons-le $\varphi(n+1)$, tel que $|u_{\varphi(n+1)} - \ell| > \varepsilon$, et cela conclut l'hérédité.
Conclusion : Nous avons bien construit, par récurrence, une application $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ avec les propriétés demandées.
Maintenant, notre suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ vérifie que pour tout $n \geq 0$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon$. Toutes les suites extraites de cette suite extraite vérifient donc aussi la même inégalité, incompatible avec le fait qu'elles puissent converger vers ℓ. Ceci prouve "non Q". Nous avons bien montré que "non P" implique "non Q", ou, de manière équivalente, que P implique Q.

Exercice 8 ((**) Le théorème de Heine)**.** On veut montrer, à partir du théorème de Bolzano-Weierstrass, le théorème de Heine :

Toute fonction continue sur un intervalle compact est uniformément continue.

On raisonne pour ça par contraposée. Soit donc f une fonction non-uniformément continue sur un intervalle compact $[a,b]$. On doit montrer que f n'est pas continue.

1. Écrire la signification précise de « f n'est pas uniformément continue ».
2. En déduire qu'il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que pour tout n entier, il existe deux réels x_n et y_n dans $[a,b]$ avec :
$$\begin{cases} |x_n - y_n| \leq \dfrac{1}{n} \\ |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon \end{cases}$$
3. A l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass, on extrait une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Montrer que $x \in [a,b]$.
4. Montrer qu'on a aussi $y_{\phi(n)} \to x$.
5. Montrer que les deux suites $(f(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peuvent pas converger vers la même limite.
6. En déduire que f n'est pas continue en x.

<u>Solution</u> :

1. Rappelons que f est dite uniformément continue sur $[a,b]$ si : $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall(x,y) \in [a,b]^2, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. La négation de cet énoncé s'énonce donc comme suit :
$\exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists(x,y) \in [a,b]^2$, tels que $|x-y| \leq \delta$ mais $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.
2. Si f n'est pas uniformément continue, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, et *a fortiori* pour tout nombre δ de la forme $\delta = \dfrac{1}{n}$, il existe $(x_n, y_n) \in [a,b]^2$, tels que $|x_n - y_n| \leq \dfrac{1}{n}$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.
3. Par construction, $x_{\phi(n)}$ est une suite d'éléments du segment $[a,b]$, convergeant vers x. Les inégalités larges $a \leq x_{\phi(n)} \leq b$ passent à la limite, et donnent $x \in [a,b]$.
4. L'inégalité triangulaire donne, pour tout $n \geq 0$, $|y_{\phi(n)} - x| \leq |y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}| + |x_{\phi(n)} - x|$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{\phi(n)} - x| = 0$ par construction de ϕ, et comme $|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}| \leq \dfrac{1}{\phi(n)}$ pour tout n, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\phi(n)} = x$.
5. D'après la question 2, on a, pour tout $n \geq 0$, $|f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})| > \varepsilon$: donc les suites $(f(x_{\phi(n)}))_{n\geq 0}$ et $(f(y_{\phi(n)}))_{n\geq 0}$ ne peuvent pas avoir la même limite.
6. Si f était continue en x, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\phi(n)} = x$ on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\phi(n)}) = f(x)$, par composition de limites. De même, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\phi(n)} = x$ on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_{\phi(n)}) = f(x)$: si f était continue en x ceci contredirait la question précédente.