

Feuille 1

Eléments de logique - Suites Numériques

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Corrigé Exercice 1 (Logique et théorie des ensembles).

Non^(*) : Il existe une prison dans laquelle il y a au moins un détenu qui aime bien au moins un gardien.

Non^(**) : Il existe un entier naturel x , tel que pour tout entier naturel y , il existe un entier naturel z tel que la relation $z \geq x + y$ est vérifiée.

L'assertion Non^(**) est vraie : une fois choisi x et y , il suffit de prendre $z := x + y$. On en déduit que ^(**) est fausse.

Corrigé Exercice 2 (Logique et théorie des ensembles).

On raisonne par l'absurde. Supposons que f n'est pas strictement croissante. Il existe alors $c, d \in [a, b]$ tels que $c < d$ et $f(c) \geq f(d)$. En particulier, la quantité $k = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$ est négative. Or, d'après le théorème de accroissements finis, il existe $x \in]c, d[$ tel que $f'(x) = k \leq 0$, ce qui contredit le fait que la dérivée de f soit strictement positive.

Corrigé Exercice 3 (Logique et théorie des ensembles).

— (sens direct) Si $F = G$, alors $F \cup G = F \cup F = F = F \cap F = F \cap G$

(Réciproque) On a :

$$F \cap G \subset F \subset F \cup G \quad \text{et} \quad F \cap G \subset G \subset F \cup G \quad (1)$$

Ainsi, si $F \cup G = F \cap G$, on a :

$$F \cap G = F = F \cup G \quad \text{et} \quad F \cap G = G = F \cup G \quad (2)$$

D'où $F = G$

— Mettons qu'on veuille construire un sous-ensemble A de E . Pour chaque élément $a \in E$, on peut faire le choix $a \in A$ ou $a \notin A$. On a donc $2^{\text{card}E} = 2^4 = 16$ possibilités. Il peut être aussi intéressant de tous les écrire : l'ensemble vide, les 4 ensembles à 1 élément, les 6 à 2 éléments, les 4 à 3 éléments, et A tout entier.

Corrigé Exercice 4 (Logique et théorie des ensembles).

1. La borne supérieure de A est facile à trouver, c'est $\frac{3}{2}$. En effet, elle est atteinte (c'est donc un maximum) pour $p = 1$ et $q = 2$. Montrons que pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \neq q$, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{3}{2}$, alors $\{p; q\} = \{1; 2\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $p < q$. Si $p \geq 2$, alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$: on a donc nécessairement $p = 1$. On obtient ainsi $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{2}$ puis $q \leq 2$ puis enfin $q = 2$ (car $q \neq p$). Ainsi, si $a \in A$ est supérieure à $\frac{3}{2}$, $a = \frac{3}{2}$ ce qui achève de montrer que $\frac{3}{2}$ est le maximum (donc la borne supérieure).

La borne inférieure de A est 0. Déjà, 0 est bien minorant car tous les éléments de A sont positifs. Ensuite, soit ϵ un réel strictement positif et montrons qu'il ne peut pas être minorant de A : Soit N un entier strictement supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$. Pour $p = 2N$ et $q = 2N + 1$, on a :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{N} < \epsilon \quad (3)$$

D'où ϵ n'est pas un minorant. Ainsi, 0 est le plus petit des minorants i.e 0 est la borne inférieure.

2. La borne supérieure $\frac{3}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$ appartient bien à A ; comme tous les éléments de A sont strictement positifs, $0 \notin A$.

Corrigé Exercice 5 (Récurrence).

(On utilisera l'abréviation suivante : HR signifie « Hypothèse de Récurrence »)

- 1. Soit $P(n) : \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$.
(Initialisation) On a :

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^k k = -1 = \frac{-4}{4} = \frac{-3-1}{4} = \frac{((-1)^1 (2 \cdot 1 + 1) - 1)}{4} \quad (4)$$

Donc $P(1)$ est vrai

(Hérédité) Supposons $P(n)$ vrai. On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^n (-1)^k k + (-1)^{n+1} (n+1) \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4} + (-1)^{n+1} (n+1) \quad \text{(HR)} \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \frac{(-1)^{n+1} (-2n-1) - 1}{4} + \frac{(-1)^{n+1} (4n+4)}{4} \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \frac{(-1)^{n+1} (2n+3) - 1}{4} \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \frac{(-1)^{n+1} (2(n+1)+1) - 1}{4} \quad (9)$$

D'où l'hérédité puis le résultat.

2. Soit $Q(n) : 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

(Initialisation) On a $2^0 = 1! = 1^1 = 1$ d'où $Q(1)$ est vrai.

(Hérédité) Supposons $Q(n)$ vrai. On a :

$$2^n = 2^{n-1} \cdot 2 \leq_{\text{(HR)}} n! \cdot 2 \leq n! \cdot (n+1) \leq_{\text{(HR)}} n^n \cdot (n+1) \leq (n+1)^n \cdot (n+1) \quad (10)$$

D'où :

$$2^n \leq (n+1)! \leq (n+1)^{(n+1)} \quad (11)$$

D'où l'hérédité et le résultat.

- $P(n) : 2^n > n^2$.

- $P(0)$ est l'énoncé $1 > 0$: il est vrai. $P(1)$ est l'énoncé $2 > 1$: il est vrai. $P(2)$ est l'énoncé $4 > 4$: il est faux. $P(3)$ est l'énoncé $8 > 9$: il est faux. $P(4)$ est l'énoncé $16 > 16$: il est faux. $P(5)$ est l'énoncé $32 > 25$: il est vrai.
- L'initialisation à 5 a été faite à la question précédente. Soit $n \geq 5$ tel que $P(n)$ soit vraie. Comme $n > 2$, on a $n^2 > 2n$ puis $n^2 \geq 2n+1$. On a donc :

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n >_{\text{(HR)}} n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad (12)$$

D'où l'hérédité et le résultat.

Corrigé Exercice 6 (Contraposée).

— Si n est pair, on peut écrire $n = 2k$ puis $n^2 = 2 \cdot (2k^2)$ d'où n^2 est pair. On en déduit le résultat par contraposée.

— Une fonction f est majorée sur $\mathbb{R}$ si : $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.

1. f n'est pas majoré si pour tout réel M positif, il existe un réel x tel que $f(x) > M$:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x) > M \quad (13)$$

2. Une fonction f tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ si : $\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists A \in \mathbb{R}^+$ tel que $x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$.

f ne tend pas vers l'infini s'il existe un réel positif M tel que pour tout réel positif A , il existe un réel $x \geq A$ tel que $f(x) < M$:

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall A \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq A \text{ et } f(x) < M \quad (14)$$

3. Non. La fonction $f(x) = x \sin(x)$ n'est pas bornée mais ne tend pas vers l'infini puisque $f(n\pi) = 0$ pour tout entier n .

Corrigé Exercice 7 ((C) Limites : révisions du premier semestre).

1. On a $u_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$. On sait que $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ quand $x \rightarrow 0$. Ainsi, quand $n \rightarrow +\infty$, on a :

$$u_n = \frac{1 + 1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})}{1 - (1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = \frac{2 + o(1)}{-\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})} \rightarrow -\infty \quad (15)$$

2. On a $v_n = \exp(2n \log(1 + \frac{1}{n}))$. On sait que $\log(1+x) = x + o(x)$ quand $x \rightarrow 0$. Ainsi, quand $n \rightarrow +\infty$, on a :

$$v_n = \exp\left(2n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(2 + o(1)) \quad (16)$$

ce qui tend vers e^2 par continuité de l'exponentielle.

3. On a $w_n = \exp\left(\frac{1}{n} \log \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. On sait que $\sin(x) = x(1 + \varepsilon(x))$ où $\varepsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$. Ainsi, quand $n \rightarrow +\infty$, on a : $\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \log \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \log \frac{1}{n} + \log \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\log(n) + \log \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

La suite $\log \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Finalement, on a vu en cours que la suite $\frac{1}{n} \log(n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Au final la suite

$$w_n = \exp\left(\frac{1}{n} \log \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \left(-\log(n) + \log \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right)$$

qui tend vers $e^0 = 1$ quand $n \rightarrow +\infty$ par continuité de l'exponentielle.

Corrigé Exercice 8 ((C) Sommes de suites géométriques). $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $S_1(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ ($e^{i\theta}$ est différent de 1 car $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$)
2. $S_2(\theta) = \sum_{k=-n}^n e^{2ik\theta} = \sum_{k=-n}^n (e^{2i\theta})^k = e^{-2in\theta} \frac{1 - e^{2i(2n+1)\theta}}{1 - e^{2i\theta}}$ ($e^{2i\theta}$ est différent de 1 car $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$)

$$= e^{-2in\theta} \frac{e^{-i\theta} - e^{(4n+1)i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = \frac{e^{-(2n+1)i\theta} - e^{(2n+1)i\theta}}{-2i \sin(\theta)} = \frac{-2i \sin((2n+1)\theta)}{-2i \sin(\theta)} = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \quad (17)$$
3. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$
4. $\sum_{k=0}^3 3i^k = 3 \sum_{k=0}^3 i^k = 3 \frac{1 - i^4}{1 - i} = 3 \frac{0}{1 - i} = 0$

Corrigé Exercice 9 (Somme d'entiers, de carrés, de cubes).

1. - Montrons par récurrence : $R_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Déjà, on a $R_0 = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$ d'où l'initialisation. Supposons le résultat vrai au rang n . On a

$$R_{n+1} = R_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \quad (18)$$

d'où le résultat.

- Montrons : $S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Déjà, $S_0 = 0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6}$ d'où l'initialisation. Supposons que le résultat soit vrai au rang n . On a :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \quad (19)$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad (20)$$

D'où le résultat.

- Montrons : $T_n = (R_n)^2$. Déjà, $T_0 = 0 = (R_0)^2$ d'où l'initialisation. Supposons le résultat vrai au rang n . On a :

$$T_{n+1} = T_n + (n+1)^3 = (R_n)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n^2 + 4n + 4)(n+1)^2}{4} \quad (21)$$

$$= \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} \quad (22)$$

D'où le résultat.

2. On joue au puzzle de la façon suivante : On considère deux jeux de n dominos, de dimensions $1 \times 1, 2 \times 1, \dots, n \times 1$, disons un rouge et un bleu. L'aire totale des deux jeux de dominos est $2R_n$ par définition. Mais si on met à côté le domino bleu de taille $k \times 1$ et le domino rouge de taille $(n+1-k) \times n$ pour $1 \leq k \leq n$ on obtient n rectangles de taille $(n+1) \times 1$. En les mettant côte à côte, on pave avec nos deux jeux de dominos un rectangle d'aire $n(n+1)$. D'où $2R_n = n(n+1)$
3. Le côté du grand carré mesure R_n , donc le grand carré a pour aire R_n^2 . Calculons cette même aire en calculant les aires des bandes entre le k -ième carré dessiné et le $(k+1)$ -ième. On peut découper cette bande en trois morceaux, en prolongeant les côtes du carré de côté R_k : on obtient un carré de côté $R_{k+1} - R_k$ et deux rectangles de côtés R_k et $R_{k+1} - R_k$. Or $R_k = \frac{k(k+1)}{2}$ et $R_{k+1} - R_k = k+1$. L'aire de la k -ième bande est alors égale à $(R_{k+1} - R_k)^2 + 2R_k(R_{k+1} - R_k) = (k+1)^2 + k(k+1)^2 = k^3$. L'aire totale du carré vaut alors $\sum_{k=1}^n k^3 = T_n$. On a donc $R_n^2 = T_n$.

Corrigé Exercice 10 (Une suite arithmético-géométrique). Notons u_n le nombre de personnes sur le réseau au jour n .

On a $u_0 = 3$ qui correspondent aux trois personnes fondatrices.

Le premier jour chacune des trois fondatrices convainc deux nouvelles personnes de rejoindre le réseau. On a donc $6 = 3 \times 2$ personnes en plus sur le réseau et $u_1 = 3 + 6 = 9$.

Pour $n \geq 1$ et pour calculer u_{n+1} en fonction de u_n il faut calculer le nombre de personnes sur le réseau au jour $n + 1$ connaissant le nombre de personnes u_n au jour n . La règle est que chacun des u_n inscrits convainc deux nouvelles personnes, sauf les trois fondatrices. Il y a donc $(u_n - 3) \times 2$ nouvelles personnes. Il faut bien sûr ajouter à cela les personnes qui étaient déjà sur le réseau. Au total au jour $n + 1$ il y a donc

$$u_{n+1} = u_n + 2(u_n - 3) \quad (23)$$

personnes sur le réseau au jour $n + 1$.

On réécrit (23) sous la forme :

$$u_{n+1} = 3u_n - 6.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc définie par

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 9$$

et la relation de récurrence

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = 3u_n - 6.$$

C'est donc une suite arithmético-géométrique de raisons géométrique $q = 3$ et arithmétique $r = -6$ **à partir du rang** $n = 1$. Pour se ramener à une suite géométrique on procède comme dans le cours en introduisant la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$v_n = u_n + \frac{r}{q-1} = u_n - 3.$$

On vérifie que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison 3 : pour tout $n \geq 1$, on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = (3u_n - 6) - 3 = 3u_n - 9 = 3(u_n - 3) = 3v_n.$$

Mais, d'après le cours, le terme général d'une suite géométrique $(v_n)_{n \geq 1}$ de raison 3 est $v_n = v_1 3^{n-1}$. On conclut que

$$u_{365} = v_{365} + 3 = 3^{364}v_1 + 3 = 3^{364}6 + 3$$

ce qui est plus grand que le nombre d'atomes dans l'univers...

On pourrait remarquer que le nombre de personnes inscriptibles est majoré par la population mondiale, le nombre d'inscrit après un an s'élèverait donc plutôt à 7 394 823 383 personnes, population mondiale à l'heure où ces lignes sont écrites mais cela a déjà changé Certains ne manqueront d'ailleurs pas de faire remarquer qu'une borne plus juste serait le nombre de personnes ayant accès à internet dans le monde (ce qui serait plutôt aux alentours de 2,9 milliards).