Intégration (troisième feuille)

Exercice 1 (Sommes de Riemann)**.** Soient $a < b$ deux réels (pour simplifier les notations, on peut dans un premier temps traiter l'exercice avec $a = 0$, $b = 1$; c'est alors un bon exercice de savoir le refaire en général) et f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Notons pour tout entier $n \geq 1$, ϕ_n la fonction définie sur $[a, b]$ par $\phi_n(x) = f(a + i\frac{b-a}{n})$ pour $x \in [a + i\frac{b-a}{n}, a + (i+1)\frac{b-a}{n}[$.

1. Montrer que ϕ_n est en escalier et calculer son intégrale sur $[a, b]$.
2. Majorer l'erreur $|f - \phi_n|$ en fonction de n et $M = \max_{[a,b]}|f'|$.
3. Montrer que $\int_a^b \phi_n(t)dt$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$ et montrer que la différence est un $O(\frac{1}{n})$.
4. En appliquant le résultat précédent, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} \qquad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2 + 3n^2} \qquad \text{puis} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{3n}\right)}{n}.$$

On reprend maintenant les questions 1 à 3 en essayant d'améliorer la vitesse de convergence (en pratique, $O(\frac{1}{n})$, c'est plutôt mauvais pour faire des estimations). On fait donc la *méthode des trapèzes*. Pour ça, on suppose que f est C^2 sur $[a, b]$. Notons pour tout entier $n \geq 1$, ψ_n la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$\psi_n(x) = (1-t)f(a + i\frac{b-a}{n}) + tf(a + (i+1)\frac{b-a}{n})$$

pour $x = a + (i+t)\frac{b-a}{n} \in [a + i\frac{b-a}{n}, a + (i+1)\frac{b-a}{n}[$.

5. Calculer les limites à droite et à gauche de ψ_n en les points $a + i\frac{b-a}{n}$. Montrer que ψ_n est affine sur les intervalles $]a + i\frac{b-a}{n}, a + (i+1)\frac{b-a}{n}[$. Dessiner le graphe d'une fonction ψ_n pour une fonction f donnée (par exemple, $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$, $n = 4$).
6. Montrer que ψ_n est intégrable et calculer son intégrale sur $[a, b]$.
7. Majorer l'erreur $|\psi_n - f|$ en fonction de n et $M' = \max_{[a,b]}|f''|$.
8. Montrer que $\int_a^b \psi_n(t)dt$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$ et montrer que la différence est un $O(\frac{1}{n^2})$.

<u>Solution</u> : *1.* Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, on note $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Il est alors clair que ϕ_n est en escalier pour la subdivision adaptée $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, on a donc

$$\int_a^b \phi_n(t)dt = \sum_0^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_i).$$

2. Pour tout $x \in [a, b]$, il existe un unique i entre 0 et $n-1$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}[$. Pour cet unique i, on a alors $|x - x_i| \leqslant \frac{b-a}{n}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f, on obtient donc

$$|f(x) - \phi_n(x)| = |f(x) - f(x_i)| \leqslant \frac{b-a}{n} M.$$

3. Pour tout entier n, on a

$$\left|\int_a^b \phi_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| = \left|\int_a^b (\phi_n(t) - f(t))dt\right| \leqslant \int_a^b |\phi_n(t) - f(t)|dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{n} M.$$

Donc $\int_a^b \phi_n(t)dt$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$ et l'erreur est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

4. Pour $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+n}$, on applique les résultats précédents à $f(t) = \frac{1}{1+t}$ sur l'intervalle $[0,1]$. On a alors $\phi_n(t) = \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$ pour tout $i \in \{0, \cdot, n\}$ et $t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$. Et donc

$$\int_0^1 \phi_n(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = ln(2).$$

Pour $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{i^2+3n^2}$, on considère la fonction $g(t) = \frac{1}{t^2+3}$. On a $\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$. En faisant le changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{3}}$, on obtient $\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Et donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{i^2+3n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Pour $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{i\pi}{3n}\right)\cos\left(\frac{i\pi}{3n}\right)}{n}$, considérer $h(t) = \sin(\frac{\pi}{3}t)\cos(\frac{\pi}{3}t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi}{3}t)$. On trouve alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{i\pi}{3n}\right)\cos\left(\frac{i\pi}{3n}\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{8\pi}.$$

5. On reprend les notations précédentes en posant $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant n$. Remarquons alors que la fonction ψ_n peut s'écrire $\psi_n(x) = \left(1 - \frac{n(x-x_i)}{b-a}\right) f(x_i) + \frac{n(x-x_i)}{b-a} f(x_{i+1})$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$, ce qui montre que la fonction est affine par morceaux. De plus,

$$\lim_{\substack{x\to x_{i+1}\\ x<x_{i+1}}} \psi_n(x) = f(x_{i+1}) \text{ et } \lim_{\substack{x\to x_{i+1}\\ x>x_{i+1}}} \psi_n(x) = f(x_{i+1}).$$

6. En tant que fonction continue, ψ_n est intégrable. Pour calculer son intégrale, on peut remarquer que l'intégrale sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est l'aire du trapèze de sommets $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Notons A_i l'aire de ce trapèze. On a alors

$$A_i = \frac{b-a}{n}\min(f(x_i), f(x_{i+1})) + \frac{|f(x_i) - f(x_{i+1})|}{2}\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}.$$

Ainsi,

$$\int_a^b \psi_n(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \frac{b-a}{2n}(f(a)+f(b)) + \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i).$$

7. Pour tout $x \in [a,b]$ il existe un unique $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et un unique $t \in [0,1]$ tels que $x = x_i + t\frac{b-a}{n}$. Pour ce i et ce t on a

$$|\psi_n(x_i+t\frac{b-a}{n}) - f(x_i+t\frac{b-a}{n})| = |(1-t)f(x_i)+tf(x_{i+1}) - f(x_i+t\frac{b-a}{n})| = |t(f(x_{i+1})-f(x_i)) - (f(x_i+t\frac{b-a}{n}) - f(x_i))|.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe alors $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et $d_i \in [x_i, x_i + t\frac{b-a}{n}]$ tels que $f(x_{i+1}) - f(x_i) = \frac{b-a}{n}f'(c_i)$ et $f(x_i + t\frac{b-a}{n}) - f(x_i) = t\frac{b-a}{n}f'(d_i)$. Ainsi, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à f', on a

$$|t(f(x_{i+1}) - f(x_i)) - (f(x_i+t\frac{b-a}{n}) - f(x_i))| = |t\frac{b-a}{n}||f'(c_i) - f'(d_i)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n^2}M'.$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\int_a^b \psi_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |\psi_n(t) - f(t)|dt \leqslant \frac{(b-a)^3}{n^2}M'.$$

Exercice 2 (Intégrales et convexité)**.** Soit f une fonction C^1 définie sur $\mathbb{R}$, positive et convexe. On rappelle que le graphe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes, mais en-dessous des cordes. Soit N un entier. On recommande de faire des dessins pour résoudre cet exercice. Par exemple on pourra prendre pour les dessins $f(x) = x^2$ et dessiner les graphes des fonctions g et h.

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(n)$ pour l'unique entier n tel que $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$. Montrer que g est en escalier sur $[1, N]$ et calculer $\int_1^N g(t)dt$.
2. Montrer que $\int_1^N f(t)dt \leq \frac{f(1)}{2} + f(2) + \cdots + f(N-1) + \frac{f(N)}{2}$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à f en un entier n.
4. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = f(n) + f'(n)(x-n)$ pour l'unique entier n tel que $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$. Montrer que h est intégrable sur $[1, N]$ et calculer $\int_1^N h(t)dt$.
5. Montrer que $\int_1^N f(t)dt \geq \frac{f(1)}{2} + f(2) + \cdots + f(N-1) + \frac{f(N)}{2} - \frac{f'(1) + f'(N)}{8}$.

<u>Solution</u> :

1. La fonction g est bien en escalier sur $[1, N]$ pour la subdivision adaptée $\{x_0 = 1 < x_1 = 1 + \frac{1}{2} < x_2 = 2 + \frac{1}{2} < \cdots < x_{N-1} = N - \frac{1}{2} < x_N = N\}$. On a de plus

$$\int_1^N g(t)dt = \frac{f(1)}{2} + f(2) + \cdots + f(N-1) + \frac{f(N)}{2}.$$

2. Comme f est en dessous de ses cordes car elle est convexe, pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on a $f(x) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. En appliquant ceci aux intervalles $[k, k+1]$ pour $1 \leqslant k \leqslant N-1$, on obtient $f(x) \leqslant (f(k+1) - f(k))(x-k) + f(k)$ pour tout $x \in [k, k+1]$. En passant à l'intégrale, on a alors $\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \frac{f(k) + f(k+1)}{2}$. Puis, en sommant sur k entre 1 et $N-1$,

$$\int_1^N f(t)dt \leqslant \frac{f(1)}{2} + f(2) + \cdots + f(N-1) + \frac{f(N)}{2}.$$

3. L'équation de la tangente à f en un entier n est $y = f'(n)(x-n) + f(n)$.

4. h étant affine par morceaux, elle est intégrable sur $[1, N]$ et son intégrale est

$$\int_1^N h(t)dt = \int_1^{\frac{3}{2}} h(t)dt + \sum_{n=2}^{N-1} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} h(t)dt + \int_{N-\frac{1}{2}}^N h(t)dt = \frac{f(1)}{2} + \frac{f'(1)}{8} + f(2) + \cdots + f(N-1) + \frac{f(N)}{2} + \frac{f'(N)}{8}.$$

5. f étant au dessus de chacune de ses tangentes, on en déduit que pour tout entier k et tout réel $x \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$, $f(x) \geqslant f'(k)(x-k) + f(k) = h(x)$. Par suite, $f(x) \geqslant h(x)$ pour tout réel $x \in [1, N]$ et donc

$$\int_1^N f(t)dt \geqslant \frac{f(1)}{2} + \frac{f'(1)}{8} + f(2) + \cdots + f(N-1) + \frac{f(N)}{2} + \frac{f'(N)}{8}.$$

Exercice 3 (Formule de Stirling)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction ln sur l'intervalle $[1, n]$.

1. Par une intégration par parties, calculer $I_n = \displaystyle\int_1^n \ln\, t\, dt$

2. En utilisant la méthode des trapèzes et la concavité de la fonction ln, montrer que

$$I_n = \frac{1}{2}\ln\, 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \ln\, k + \frac{1}{2}\ln\, n + E_n$$

où $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, à valeurs positives.

3. En utilisant l'erreur dans la méthode des trapèzes sur chaque intervalle $[k, k+1]$, montrer que la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc convergente.

4. En déduire la formule de Stirling : il existe une constant $K > 0$ telle que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K n^n e^{-n}\sqrt{n}$$

(On peut démontrer que $K = \sqrt{2\pi}$)

Solution :

1. On pose $u = ln(t)$ et $v' = 1$. D'où

$$I_n = \int_1^n ln(t)dt = [tln(t)]_1^n - \int_1^n dt = nln(n) - n + 1$$

2. La méthode des trapèzes consiste à remplacer l'aire comprise entre le graphe de la fonction ln et l'axe des x entre les points k et $k+1$ par l'aire du trapèze joignant les quatre points de R^2, de coordonnés :

$$(k, 0), \quad (k, \ln\, k), \quad \big(k+1, \ln(k+1)\big), \quad (k+1, 0)$$

c'est-à-dire $\dfrac{ln(k) + ln(k+1)}{2}$.

La somme des aires de ces trapèzes pour $1 \le k \le n-1$ vaut

$$S_n = \frac{1}{2}\ln\, 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \ln\, k + \frac{1}{2}\ln\, n = \sum_{k=2}^{n-1} \ln\, k + \frac{1}{2}\ln\, n$$

Comme la fonction ln est concave, son graphe entre deux points est au dessus de la corde joignant ces deux points.

Donc l'aire comprise entre le graphe de la fonction ln et l'axe des x entre les points k et $k+1$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_k^{k+1} ln(t)\, dt$ est supérieure à l'aire du trapèze joignant les points $(k, 0)$, $(k, \ln\, k)$, $\big(k+1, \ln(k+1)\big)$ et $(k+1, 0)$.

Par suite, en sommant sur k, de $k = 1$ à $n-1$,

$$E_n = I_n - S_n = I_n - \sum_{k=2}^{n-1} \ln\, k - \frac{1}{2}\ln\, n \ge 0$$

De plus, la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puisque pour passer de n à $n+1$ points, on rajoute un terme positif, c'est-à-dire la différence des aires du graphe de la fonction et du trapèze.

3. L'erreur dans la méthode des trapèzes sur chaque intervalle $[k, k+1]$, de longueur 1, est majorée par

$$\sup_{k\le x\le k+1} |\ln''\, x| = \sup_{k\le x\le k+1} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{k^2}$$

Donc, en sommant sur k de $k = 1$ à $n - 1$,

$$E_n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt \leq 1 + \int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt \leq 1 + (1 - \frac{1}{n-1}) \leq 2$$

La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge. Soit c sa limite. On peut alors écrire $E_n = c + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

4. On remarque que

$$E_n = I_n - \sum_{k=2}^{n-1} \ln\, k - \frac{1}{2} \ln\, n = n \ln\, n - n + 1 - \ln\,(n!) + \frac{1}{2} \ln\, n$$

D'où

$$\ln\,(n!) = n \ln\, n - n + \frac{1}{2} \ln\, n + 1 - E_n$$

En prenant l'exponentielle et en posant $K = e^{1-c}$:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} K e^{\varepsilon_n}$$

avec $e^{\varepsilon_n} \to 1$ quand $n \to +\infty$, ce qui donne

$$n! \sim_{n\to+\infty} n^n e^{-n} \sqrt{n} K$$