Intégration (troisième feuille)

Exercice 1 (Sommes de Riemann)**.** Soient $a < b$ deux réels (pour simplifier les notations, on peut dans un premier temps traiter l'exercice avec $a = 0$, $b = 1$; c'est alors un bon exercice de savoir le refaire en général) et f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Notons pour tout entier $n \geq 1$, ϕ_n la fonction définie sur $[a, b]$ par $\phi_n(x) = f(a + i\frac{b-a}{n})$ pour $x \in [a + i\frac{b-a}{n}, a + (i+1)\frac{b-a}{n}[$.

1. Montrer que ϕ_n est en escalier et calculer son intégrale sur $[a, b]$.
2. Majorer l'erreur $|f - \phi_n|$ en fonction de n et $M = \max_{[a,b]}|f'|$.
3. Montrer que $\int_a^b \phi_n(t)dt$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$ et montrer que la différence est un $O(\frac{1}{n})$.
4. En appliquant le résultat précédent, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} \qquad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2 + 3n^2} \qquad \text{puis} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{3n}\right)}{n}.$$

On reprend maintenant les questions 1 à 3 en essayant d'améliorer la vitesse de convergence (en pratique, $O(\frac{1}{n})$, c'est plutôt mauvais pour faire des estimations). On fait donc la *méthode des trapèzes*. Pour ça, on suppose que f est C^2 sur $[a, b]$. Notons pour tout entier $n \geq 1$, ψ_n la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$\psi_n(x) = (1-t)f(a + i\frac{b-a}{n}) + tf(a + (i+1)\frac{b-a}{n})$$

pour $x = a + (i+t)\frac{b-a}{n} \in [a + i\frac{b-a}{n}, a + (i+1)\frac{b-a}{n}[$.

5. Calculer les limites à droite et à gauche de ψ_n en les points $a + i\frac{b-a}{n}$. Montrer que ψ_n est affine sur les intervalles $]a + i\frac{b-a}{n}, a + (i+1)\frac{b-a}{n}[$. Dessiner le graphe d'une fonction ψ_n pour une fonction f donnée (par exemple, $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$, $n = 4$).
6. Montrer que ψ_n est intégrable et calculer son intégrale sur $[a, b]$.
7. Majorer l'erreur $|\psi_n - f|$ en fonction de n et $M' = \max_{[a,b]}|f''|$.
8. Montrer que $\int_a^b \psi_n(t)dt$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$ et montrer que la différence est un $O(\frac{1}{n^2})$.

Exercice 2 (Intégrales et convexité)**.** Soit f une fonction C^1 définie sur $\mathbb{R}$, positive et convexe. On rappelle que le graphe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes, mais en-dessous des cordes. Soit N un entier. On recommande de faire des dessins pour résoudre cet exercice. Par exemple on pourra prendre pour les dessins $f(x) = x^2$ et dessiner les graphes des fonctions g et h.

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(n)$ pour l'unique entier n tel que $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$. Montrer que g est en escalier sur $[1, N]$ et calculer $\int_1^N g(t)dt$.
2. Montrer que $\int_1^N f(t)dt \leq \frac{f(1)}{2} + f(2) + \cdots + f(N-1) + \frac{f(N)}{2}$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à f en un entier n.
4. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = f(n) + f'(n)(x-n)$ pour l'unique entier n tel que $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$. Montrer que h est intégrable sur $[1, n]$ et calculer $\int_1^N h(t)dt$.
5. Montrer que $\int_1^N f(t)dt \geq \frac{f(1)}{2} + f(2) + \cdots + f(N-1) + \frac{f(N)}{2} - \frac{f'(1) + f'(N)}{8}$.

Exercice 3 (Formule de Stirling)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction ln sur l'intervalle $[1, n]$.

1) Par une intégration par parties, calculer $I_n = \displaystyle\int_1^n \ln t \, dt$

2) En utilisant la méthode des trapèzes et la concavité de la fonction ln, montrer que

$$I_n = \frac{1}{2} \ln 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \ln k + \frac{1}{2} \ln n + E_n$$

où $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, à valeurs positives.

3) En utilisant l'erreur dans la méthode des trapèzes sur chaque intervalle $[k, k+1]$, montrer que la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc convergente.

4) En déduire la formule de Stirling : il existe une constant $K > 0$ telle que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

(On peut démontrer que $K = \sqrt{2\pi}$)