Corrigé - Feuille 12
Intégration (deuxième feuille)

Exercice 1 (Intégration des fractions rationnelles).

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante sous la forme :

$$\varphi(X) = \frac{1}{X(X+1)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1},$$

   où A et B sont deux constantes à déterminer. En déduire une primitive de φ sur un intervalle ne contenant pas les valeurs 0 et -1.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante sous la forme :

$$\psi(X) = \frac{1}{X^2(X+1)^2} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{C}{X+1} + \frac{D}{(X+1)^2},$$

   où A, B, C et D sont à déterminer. En déduire la valeur de $\int_1^x \psi(t)\,dt$, pour $x > 1$.

Solution :

1. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle définissant la fonction φ est de la forme :

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1}.$$

   où a et b sont des coefficients réels.

   Pour calculer a, on multiplie cette égalité par X et on fait $X = 0$. Cela donne $1 = a$.

   Pour calculer b, on multiplie cette égalité par $X + 1$ et on tait $X = -1$. Cela donne $-1 = b$.

   D'où :

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}.$$

   On en déduit une primitive de la fonction φ sur un intervalle ne contenant pas 0 et -1 en utilisant la décomposition en éléments simples, soit :

$$\Phi(x) = \int \varphi(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x| - \ln|x+1| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

2. — La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle définie par ψ est de la forme :

$$\frac{1}{X^2(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$

   où a, b, c et d sont des coefficients réels.

   Pour calculer b, on multiplie cette égalité par X^2 et on fait $X = 0$. Cela donne $1 = b$.

   Pour calculer d, on multiplie cette égalité par $(X + 1)^2$ et on fait $X = -1$. Cela donne $1 = d$.

   Pour calculer a et c, on multiplie par X et on fait tendre X vers $+\infty$. Cela donne $0 = a + c$.

   Ensuite, on prend par exemple $X = 1$, d'où $\frac{1}{4} = a + 1 + \frac{c}{2} + \frac{1}{4}$. Cela donne $-1 = a + \frac{c}{2}$.

   On en déduit $a = -2$ et $c = 2$.

   Donc finalement :

$$\frac{1}{X^2(X+1)^2} = -\frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}.$$

— On utilise la décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned}
\int_1^x \psi(t)\,dt &= -\int_1^x \frac{2dt}{t} + \int_1^x \frac{dt}{t^2} + \int_1^x \frac{2dt}{t+1} + \int_1^x \frac{dt}{(t+1)^2}, \\
&= -2\big[\ln t\big]_1^x + \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x + 2\big[\ln(t+1)\big]_1^x + \left[\frac{-1}{t+1}\right]_1^x, \\
&= -2\ln x - \frac{1}{x} + 1 + 2\ln(x+1) - 2\ln 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}, \\
&= 2\ln(x+1) - 2\ln x - \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2\ln 2 + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (Intégrale de Wallis)**.** Soit la suite d'intégrales définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.
2. Montrer alors que $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Solution :

1. On procède à une intégration par parties comme suit :

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\sin^{n+1}x\;dx = \Big[-\cos x\sin^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\sin^n x\;dx, \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\,\sin^n x\;dx = (n+1)(I_n - I_{n+2}).
\end{aligned}$$

D'où :

$$\forall\, n\in\mathbb{N} : I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,I_n. \tag{1}$$

2. — Si $n = 2p$ l'équation (1) permet d'écrire de proche en proche :

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2p)(2p-2)\dots 2}\,I_0 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 1}{\big((2p)(2p-2)\dots 2\big)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

— Si $n = 2p+1$ l'équation (1) conduit alors à :

$$I_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1}\,I_1 = \frac{\big((2p)(2p-2)\dots 2\big)^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)\dots 1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercice 3 (Intégrales impropres)**.**

1. Calculer, pour tout $X\in\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^X te^{-t^2}dt$. Cette intégrale admet-elle une limite quand $X\to+\infty$?
2. Montrer que la fonction $\varphi : X \to \displaystyle\int_1^X e^{-t^2}dt$ est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$.
3. En déduire qu'elle admet une limite quand $X\to+\infty$.

   Dans ces cas-là, on note la limite $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ et on parle d'intégrale impropre convergente.

   D'un manière générale, on peut établir que pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^X P(t)e^{-t^2}dt$ admet une limite quand $X\to\infty$.

Solution :

1. $\forall X \geq 1$, on a : $\displaystyle\int_1^X te^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_1^X = \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-X^2}\right)$.

   On en déduit :
   $$\lim_{X\to+\infty}\left[\int_1^X te^{-t^2}dt\right] = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-X^2}\right) = \frac{1}{2e},$$
   et l'intégrale admet une limite lorsque X tend vers $+\infty$.

2. La croissance de φ est immédiate puisque la fonction intégrée est positive sur $[1, X], (X \geq 1)$. Puis, pour tout $t \geqslant 1$, on a : $e^{-t^2} \leq te^{-t^2}$.

   Il en résulte que :
   $$\forall\, X \geq 1 : \varphi(X) = \int_1^X e^{-t^2}dt \leq \int_1^X te^{-t^2}dt \leq \int_1^{+\infty} te^{-t^2}dt = \frac{1}{2e}, \qquad (2)$$
   ce qui prouve que la fonction φ est majorée sur $[1, +\infty[$.

3. La fonction φ étant croissante et majorée sur $[1, +\infty[$; elle admet donc une limite lorsque X tend vers $+\infty$ notée $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Exercice 4 (Lemme de Gronwall)**.** On considère une fonction $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ positive et continue et on fixe deux réels $0 < a < b$.

On suppose que pour tout $x \geq 1$, on a : $f(x) \leq a\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt + b$.

1. On introduit la fonction $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt$ pour $x \geq 1$. Montrer que $F'(x) \leq \dfrac{a}{x^2}F(x) + \dfrac{b}{x^2}$.
2. On pose $G(x) = F(x)e^{\frac{a}{x}}$. Déduire de la question précédente une majoration de G', puis de $G(x)$.
3. En déduire une majoration de F, puis finalement que :
   $$f(x) \leq b\, e^{(a-\frac{a}{x})}.$$

Solution :

1. On a : $F'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2} \leq \dfrac{a}{x^2}\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt + \frac{b}{x^2} = \frac{a}{x^2}F(x) + \frac{b}{x^2}$.

2. On a : $G'(x) = F'(x)e^{\frac{a}{x}} - \dfrac{a}{x^2}F(x)e^{\frac{a}{x}} = \left[F'(x) - \dfrac{a}{x^2}F(x)\right]e^{\frac{a}{x}} \leq \dfrac{b}{x^2}e^{\frac{a}{x}}$, d'après la question précédente.

   Par ailleurs, ayant $F(1) = 0$, $G(1) = F(1)e^a = 0$. En intégrant entre 1 et $x, (x \geq 1)$, l'inéquation de la question précédente, on obtient la majoration de $G(x)$ suivante :
   $$G(x) = G(x) - G(0) = \int_1^x G'(t)dt \leq \int_1^x \frac{b}{t^2}e^{\frac{a}{t}}dt = \frac{b}{a}\left[e^a - e^{\frac{a}{x}}\right],$$
   puisqu'en introduisant le changement de variable $s = \dfrac{1}{t}$ on a $ds = -\dfrac{dt}{t^2}$, et par conséquent :
   $$\int_1^x \frac{e^{\frac{a}{t}}}{t^2}dt = \int_1^{\frac{1}{x}}(-e^{as})ds = \left[-\frac{e^{as}}{a}\right]_1^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{a}\left[e^a - e^{\frac{a}{x}}\right].$$

3. Ayant la relation entre $F(x)$ et $G(x)$ donnée par : $F(x) = G(x)e^{-\frac{a}{x}}$, la majoration de $F(x)$ découle de celle de $G(x)$, obtenue à la question précédente, à savoir :
   $$F(x) \leq \frac{b}{a}\left[e^a - e^{\frac{a}{x}}\right]e^{-\frac{a}{x}} = \frac{b}{a}\left[e^{(a-\frac{a}{x})} - 1\right].$$

Et finalement, la majoration de f est obtenue par la suite d'inégalité suivantes :

$$f(x) \leq a \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt + b = aF(x) + b \leq b\, e^{(a - \frac{a}{x})}.$$

Exercice 5 (Méthode du point milieu)**.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = \dfrac{(b-a)}{n}$ et considère la subdivision de l'intervalle $[a, b]$:

$$x_0 = a < x_1 = a + h < x_2 = a + 2h < \cdots < x_n = a + nh = b.$$

On définit $x'_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$ et on considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

On pose alors : $J_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x'_k) h$.

1. On suppose que la fonction f est de classe C^2 et vérifie :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f''(x)| \leq M_2.$$

Soit k fixé dans $0, 1, \cdots, n-1$. Montrer que pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$, il existe un point $c_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que :

$$f(x) = f(x'_k) + (x - x'_k) f(x'_k) + \frac{(x - x'_k)^2}{2} f''(c_k).$$

2. Montrer que pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$: $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)\ dt = 0$.

3. En déduire que pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$:

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x'_k))\ dt \right| \leq \frac{M_2}{2} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)^2\ dt \right|.$$

4. Montrer que pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$: $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)^2\ dt = \frac{h^3}{12}$.

5. En déduire que

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - J_n \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24 n^2}.$$

Solution :

1. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 montre que pour tout x dans l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, il existe un point c_k dans l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ tel que :

$$f(x) = f(x'_k) + (x - x'_k) f(x'_k) + \frac{(x - x'_k)^2}{2} f''(c_k).$$

2. On fait le changement de variable $s = t - x'_k$,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)\ dt = \int_{-h/2}^{h/2} s\, ds = 0.$$

3. On applique l'égalité de la question 1 :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(t) - f(x'_k)\big)\, dt = f(x'_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)\, dt + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(t - x'_k)^2}{2} f''(c_k)\, dt.$$

En utilisant la question 2, il vient :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(t) - f(x'_k)\right) dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(t - x'_k)^2}{2} f''(c_k)\, dt.$$

On utilise la majoration de la dérivée seconde par M_2 :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(t - x'_k)^2}{2} f''(c_k)\, dt\right| &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(t - x'_k)^2}{2} |f''(c_k)|\, dt, \\
&\leq \frac{M_2}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)^2\, dt.
\end{aligned}$$

4. On fait le changement de variable $s = t - x'_k$:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)^2\, dt = \int_{-h/2}^{h/2} s^2\, ds = \frac{h^3}{12}.$$

5. En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\, dt - J_n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(t) - f(x'_k)\right) dt\right|, \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f''(c_k)}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)^2\, dt\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{f''(c_k)}{2}\right| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)^2\, dt.
\end{aligned}$$

On applique ensuite la question 4 pour obtenir la majoration :

$$\left|\int_a^b f(t)\, dt - J_n\right| \leq n \frac{M_2}{2} \frac{h^3}{12}.$$

En remplaçant h par sa valeur, on trouve finalement :

$$\left|\int_a^b f(t)\, dt - J_n\right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24 n^2}.$$

Exercice 6 ((*) Suite d'intégrales)**.**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (a < b)$. On considère la suite I_n définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : I_n = \left[\int_a^b e^{-nt^2}\, dt\right]^{\frac{1}{n}}$.

1. En utilisant la décroissance de la fonction $f_n(t)$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [a, b,] : f_n(t) = e^{-nt^2}$, montrer que :
$$I_n \leq e^{-a^2} (b - a)^{\frac{1}{n}}.$$

2. Ecrire la continuité de la fonction $f_n(t)$ au point a par valeur supérieure et établir que :
$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, (a + \alpha \leq b), \forall t \in [a, a + \alpha] : e^{-t^2} \geq e^{-a^2}(1 - \varepsilon).$$

3. En déduire alors que la suite I_n converge et sa limite est donnée par : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = e^{-a^2}$.

Solution :

1. On remarque tout d'abord que : $\forall t \in [a,b]$, $e^{-nt^2} \leq e^{-na^2}$.

   D'où
$$I_n = \left[\int_a^b e^{-nt^2}\,dt\right]^{\frac{1}{n}} \leq \left[e^{-na^2}\right]^{\frac{1}{n}} (b-a)^{\frac{1}{n}} = e^{-a^2}(b-a)^{\frac{1}{n}}. \quad (3)$$

2. Pour établir une inégalité qui minore la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on utilise la continuité de la fonction e^{-t^2} au point a de la façon suivante :
$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } a+\alpha \leq b \text{ et } \forall t \in [a, a+\alpha] : |e^{-t^2} - e^{-a^2}| = e^{-a^2} - e^{-t^2} \leq \varepsilon_1. \quad (4)$$
   Ou encore :
$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } a+\alpha \leq b \text{ et } \forall t \in [a, a+\alpha] : e^{-a^2} - \varepsilon_1 \leq e^{-t^2}. \quad (5)$$
   Soit $\varepsilon > 0$ quelconque fixé. On choisit alors dans la propriété (5) la valeur de ε_1 définie par :
$$\varepsilon_1 = \varepsilon e^{-a^2}.$$
   La propriété de continuité (5) de la fonction e^{-t^2} au point a permet d'écrire :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, (a+\alpha < b) \text{ tel que } \forall t \in [a, a+\alpha] : e^{-a^2} - \varepsilon e^{-a^2} \leq e^{-t^2}. \quad (6)$$
   Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\alpha > 0$ tel que $a+\alpha \leq b$ et tel que :
$$\forall t \in [a, a+\alpha], \quad e^{-t^2} \geq e^{-a^2}(1-\varepsilon).$$
   Ainsi,
$$\int_a^b e^{-nt^2}\,dt \geq \int_a^{a+\alpha} e^{-nt^2}\,dt \geq (1-\varepsilon)^n \int_a^{a+\alpha} e^{-na^2}\,dt = \alpha(1-\varepsilon)^n e^{-na^2}. \quad (7)$$
   D'où l'inégalité :
$$I_n \geq \alpha^{\frac{1}{n}}(1-\varepsilon)e^{-a^2}. \quad (8)$$

3. En rassemblant les 2 inégalités (3)-(8), on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\alpha^{\frac{1}{n}}(1-\varepsilon)e^{-a^2} \leq I_n \leq e^{-a^2}(b-a)^{\frac{1}{n}} \quad (9)$$
   Or $(b-a)^{\frac{1}{n}}$ et $\alpha^{\frac{1}{n}}$ tendent vers 1 lorsque $n \to +\infty$.

   En passant à la limite dans la double inégalité (9), on obtient :
$$\forall \varepsilon > 0 : (1-\varepsilon)e^{-a^2} \leq \lim_{n\to+\infty} I_n \leq e^{-a^2}. \quad (10)$$
   Et finalement :
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = e^{-a^2}. \quad (11)$$

Exercice 7 ((*) Inégalité de Poincaré)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe C^1 et telle que $f(a) = 0$.

1. En écrivant la relation entre une fonction f et sa dérivée f' à l'aide d'une intégrale, montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tout $x \in [a,b]$ on a :
$$|f(x)|^2 \leq (x-a)\int_a^b |f'(t)|^2\,dt.$$

2. En déduire l'inégalité de Poincaré :
$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(t)|^2\,dt.$$

Solution :

1. D'après le théorème fondamental de l'intégration, pour toute fonction f appartenant à $C^1([a,b])$, on a :

$$\forall x \in [a,b] : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x f'(t)\,dt, \tag{12}$$

   puisque $f(a)$ est supposée nulle.

   Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les intégrales, valide entre autre, pour toutes fonctions $(\varphi,\psi) \in \left[C^0([a,b])\right]^2$:

$$\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt \leq \left[\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} . \left[\int_a^b |\psi(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} . \tag{13}$$

   Dès lors, on choisit dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz (13), $\varphi(t) = f'(t)$ et $\psi(t) = 1$. L'égalité (12) se transforme en l'inégalité suivante :

$$\forall x \in [a,b] : |f(x)| = \left|\int_a^x f'(t)\,dt\right| \leq \left[\int_a^x |f'(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} . \left[\int_a^x |1|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

   soit en élevant au carré de part et d'autre de l'inégalité (14) :

$$\forall x \in [a,b] : |f(x)|^2 \leq (x-a)\int_a^x |f'(t)|^2\,dt \leq (x-a)\int_a^b |f'(t)|^2\,dt. \tag{15}$$

2. En intégrant l'inégalité (15) membre à membre entre a et b, on obtient l'inégalité de Poincaré :

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(t)|^2\,dt. \tag{16}$$