

Feuille 12

Intégration (deuxième feuille)

Exercice 1 (Intégration des fractions rationnelles).

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante sous la forme :

$$\varphi(X) = \frac{1}{X(X+1)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1},$$

où A et B sont deux constantes à déterminer. En déduire une primitive de φ sur un intervalle ne contenant pas les valeurs 0 et -1 .

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante sous la forme :

$$\psi(X) = \frac{1}{X^2(X+1)^2} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{C}{X+1} + \frac{D}{(X+1)^2},$$

où A, B, C et D sont à déterminer. En déduire la valeur de $\int_1^x \psi(t) dt$, pour $x > 1$.

Exercice 2 (Intégrale de Wallis). Soit la suite d'intégrales définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre I_{n+2} et I_n .

2. Montrer alors que $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Exercice 3 (Intégrales impropres).

1. Calculer, pour tout $X \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_1^X te^{-t^2} dt$. Cette intégrale admet-elle une limite quand $X \rightarrow +\infty$?

2. Montrer que la fonction $\varphi : X \rightarrow \int_1^X e^{-t^2} dt$ est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$.

3. En déduire qu'elle admet une limite quand $X \rightarrow +\infty$.

Dans ces cas-là, on note la limite $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et on parle d'intégrale impropre convergente.

D'une manière générale, on peut établir que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_1^X P(t)e^{-t^2} dt$ admet une limite quand $X \rightarrow \infty$.

Exercice 4 (Lemme de Gronwall). On considère une fonction $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive et continue et on fixe deux réels $0 < a < b$.

On suppose que pour tout $x \geq 1$, on a : $f(x) \leq a \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt + b$.

1. On introduit la fonction $F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt$ pour $x \geq 1$. Montrer que $F'(x) \leq \frac{a}{x^2} F(x) + \frac{b}{x^2}$.
2. On pose $G(x) = F(x)e^{\frac{a}{x}}$. Déduire de la question précédente une majoration de G' , puis de $G(x)$.
3. En déduire une majoration de F , puis finalement que :

$$f(x) \leq b e^{(a - \frac{a}{x})}.$$

Exercice 5 (Méthode du point milieu).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = \frac{(b-a)}{n}$ et considère la subdivision de l'intervalle $[a, b]$:

$$x_0 = a < x_1 = a + h < x_2 = a + 2h < \dots < x_n = a + nh = b.$$

On définit $x'_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$ et on considère une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

On pose alors : $J_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x'_k)h$.

1. On suppose que la fonction f est de classe C^2 et vérifie :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f''(x)| \leq M_2.$$

Soit k fixé dans $0, 1, \dots, n-1$. Montrer que pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$, il existe un point $c_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que :

$$f(x) = f(x'_k) + (x - x'_k)f'(x'_k) + \frac{(x - x'_k)^2}{2}f''(c_k).$$

2. Montrer que pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$: $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k) dt = 0$.

3. En déduire que pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$:

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x'_k)) dt \right| \leq \frac{M_2}{2} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)^2 dt \right|.$$

4. Montrer que pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$: $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)^2 dt = \frac{h^3}{12}$.

5. En déduire que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - J_n \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^2}.$$

Exercice 6 (*) Suite d'intégrales).

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a < b)$. On considère la suite I_n définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* : I_n = \left[\int_a^b e^{-nt^2} dt \right]^{\frac{1}{n}}$.

1. En utilisant la décroissance de la fonction $f_n(t)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [a, b] : f_n(t) = e^{-nt^2}$, montrer que :

$$I_n \leq e^{-a^2} (b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

2. Ecrire la continuité de la fonction $f_n(t)$ au point a par valeur supérieure et établir que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, (a + \alpha \leq b), \forall t \in [a, a + \alpha] : e^{-t^2} \geq e^{-a^2} (1 - \epsilon).$$

3. En déduire alors que la limite de la suite I_n est donnée par : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e^{-a^2}$.

Exercice 7 (*) Inégalité de Poincaré). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 et telle que $f(a) = 0$.

1. En écrivant la relation entre une fonction f et sa dérivée f' à l'aide d'une intégrale, montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tout $x \in [a, b]$ on a :

$$|f(x)|^2 \leq (x-a) \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

2. En déduire l'inégalité de Poincaré :

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$