Feuille 11
intégration 1

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Exercice 1 ((C) Premiers calculs)**.** Déterminer les primitives des fonctions suivantes, puis calculer l'intégrale demandée.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |t|$. Calculer $\int_{-1}^{1} f(t)dt$.

Solution :
— méthode 1 :
Par la relation de Chasles on écrit $\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt$. En restriction à l'intervalle $[-1, 0]$ (*resp.* $[0, 1]$) la fonction $t \mapsto |t|$ est $t \mapsto -t$ (*resp.* $t \mapsto t$). On trouve comme résultat 1.
— méthode 2 :
On trace le graphe de la fonction $t \mapsto |t|$ puis on calcule l'aire délimitée par le graphe et l'axe horyzontal. On se retrouve à sommer deux fois l'aire d'un triangle, c'est à dire la deux fois la moitié de l'aire d'un rectangle. C'est à dire l'aire du dit rectange (ici d'aire 1).

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sin(t)$ (*resp.* $\cos(t)$). Calculer $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

Solution : On trouve dans les deux cas comme résultat 1.

3. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Calculer $F(x) = \int_{x}^{1} f(t)dt$ et déterminer si $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ existe.

Solution : On connaît une primitive de f, c'est $t \mapsto 2\sqrt{t}$. Donc $F(x) = 2-2\sqrt{(}x)$. On trouve une limite quand x tend vers 0+ : c'est 2.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-}^{x} f(t)dt$. Déterminer si $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$ existe.

Solution : On connaît une primitive de f, c'est $t \mapsto \arctan(t)$. l'intégrale vaut $F(x) = \arctan(x) - \arctan(-x) = 2\arctan(x)$. On trouve une limite quand x tend vers $+\infty$: c'est π.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(t)^2$. Calculer $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

Solution : En utilisant $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$, on trouve une primitive de $\cos^(t)$: on prend $t \mapsto \frac{t+\frac{\sin(2t)}{2}}{2}$. On en déduit que l'intégrale vaut $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 ((C) Intégrations par parties)**.** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(t)$. Calculer, pour tout $x > 0$, $\int_1^x f(t)dt$.

Solution : On trouve $x\ln(x) - x + 1$ après une IPP (intégrer $t \mapsto 1$ et dériver $t \mapsto \ln(t)$)

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t\cos(t)$. Calculer $\int_0^\pi t\cos(t)dt$.

Solution : On dérive t et on intègre le cosinus : on obtient -2.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2e^t$. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t)dt$.

Solution : On dérive t^2 et on intègre e^t. On trouve

$$\int_0^x t^2e^tdt = x^2e^x - 2\int_0^x te^tdt.$$

On effectue à nouveau une intégration par parties en dérivant t et en intégrant e^t. On obtient :

$$\int_0^x t^2e^tdt = x^2e^x - 2(xe^x - (e^x - 1)) = e^x(x^2 - 2x + 2) - 2.$$

4. $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_1^x f(t)dt$.

Solution : On dérive le $\ln(t)$ et on intègre le $\frac{1}{t}$. On obtient :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt = \ln^2(x) - \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt.$$

Autrement dit, $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt = \frac{\ln^2(t)}{2}$.

Exercice 3 ((C) Changement de variable)**.** En utilisant des changements de variables, calculer :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt \qquad I_2 = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch(t)}}dt \qquad I_3 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)dt \qquad I_5 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t}dt.$$

Solution :

I_1 : On pose $u = e^t$, soit $\frac{du}{dt} = e^t$, ou encore $du = e^tdt$. Quand t varie entre 0 et 1, u varie entre 1 et e. Donc :

$$I_1 = \int_1^e \frac{1}{1+u}du = \ln(1+e) - \ln(2).$$

I_2 : Ici encore on pose $u = e^t$. On obtient :

$$I_2 = \int_1^{e^x} \frac{1}{1+u^2} du = \arctan(e^x) - \arctan(\frac{\pi}{4}) = \arctan(e^x) - 1.$$

I_3 : Si on sait que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est la dérivée de arcsin, alors on peut intégrer directement. Sinon, on pose $t = \cos(u)$. Ici u varie entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$. Alors $\frac{dt}{du} = -\sin(u)$, soit $dt = -\sin(u)du$. De plus, $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos^2(u)} = \sqrt{\sin^2(u)} = \sin(u)$ car sur cet intervalle $\sin(u) \geq 0$. On obtient

$$I_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(u)}{\sin(u)} du = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{\pi}{4}.$$

I_4 : On renvoie au cours : $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$. On obtient $I_4 = -\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{\ln(2)}{2}$.

I_5 : On peut poser $u = \ln(t)$. u varie entre 0 et 1. De plus $\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$, soit $du = \frac{dt}{t}$. Ainsi $I_5 = \displaystyle\int_0^1 udu = \frac{1}{2}$.

Exercice 4. Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ dérivable de dérivée $f' > 0$ et continue.

1. Si l'on note $c = f(a)$ et $d = f(b)$ que représente graphiquement la quantité :
$$\int_c^d f^{-1}(t)dt$$
2. En déduire la formule suivante :
$$\int_c^d f^{-1}(t)dt + \int_a^b f(t)dt = bd - ca$$
3. Retrouver ce résultat en faisant successivement une intégration par partie et un changement de variable dans l'intégrale :
$$\int_a^b f(t)dt$$

Solution :

1. C'est l'aire entre le graphe de la fonction f et l'axe des ordonnées.

2. La somme des aires des deux premières intégrales donne graphiquement la différence des aires de deux rectangles ayant $(0,0)$ en commun. Le premier est d'aire bd et le second d'aire ac, d'où le résultat.

3. Soit
$$I = \int_a^b f(t)dt.$$
On commence par une intégration par partie : on dérive f et on intègre $t \mapsto 1$ ce qui donne :
$$I = \left[tf(t)\right]_a^b - \int_a^b tf'(t)dt$$
Dans la seconde intégrale on fait le changement de variable $u = f(t)$ d'où $du = f'(t)dt$ on obtient donc :
$$\int_a^b tf'(t)dt = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(u)du = \int_c^d f^{-1}(u)du$$
Au final :
$$I + \int_c^d f^{-1}(u)du = bd - ac$$
En remplacant I par sa définition on obtient le résultat voulu.

Exercice 5. Soit f une fonction intégrable et périodique de période T, définie sur $\mathbb{R}$. Soit a et b deux réels quelconques.

Montrer que
$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt$$

Solution :
Rappelons qu'une fonction f est prériodique de période T si
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, le graphe d'une fonction périodique est donc le même sur tous les intervalles du type $[a+nT, b+nT]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si la fonction f est intégrable et périodique sur $\mathbb{R}$, de période T, on peut écrire, par la relation de Chasles
$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^{b+T} f(t)\,dt + \int_{b+T}^{a+T} f(t)\,dt$$
Par périodicité, on a
$$\int_{b+T}^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^a f(t)\,dt$$
et donc
$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^{b+T} f(t)\,dt + \int_b^a f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt$$

Exercice 6.

1. Soit f une fonction intégrable et impaire définie sur un intervalle $[-a, +a]$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt = 0$$
2. Soit f une fonction intégrable et paire définie sur un intervalle $[-a, +a]$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt = 2\int_{0}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$$

Solution :

1. Rappelons qu'une fonction $f : [-a, +a] \to \mathbb{R}$ est impaire si
$$\forall x \in [-a, +a],\ f(-x) = -f(x)$$
Le graphe d'une fonction impaire est donc symétrique par rapport à l'origine.

   Par la relation de Chasles, on peut écrire
$$\int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt = \int_{-a}^{0} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt + \int_{0}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$$
Si la fonction f est impaire, la fonction $\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est aussi impaire et donc par symétrie par rapport à l'origine (argument graphique),
$$\int_{-a}^{0} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt = -\int_{0}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$$
(Pour un argument plus formel on peut aussi faire le changement de variable $t \mapsto -t$ dans l'une des intégrale ci dessus.) D'où
$$\int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt = -\int_{0}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt + \int_{0}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt = 0$$
2. Rappelons qu'une fonction $f : [-a, +a] \to \mathbb{R}$ est paire si
$$\forall x \in [-a, +a],\ f(-x) = f(x)$$
Le graphe d'une fonction impaire est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

De la même façon, si la fonction f est paire, la fonction $\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est aussi paire et donc par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées,

$$\int_{-a}^{0} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt = \int_{0}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$$

D'où

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt = \int_{0}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt + \int_{0}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt = 2\int_{0}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$$

Exercice 7. On rappelle que si $x \in \mathbb{R}$, sa partie entière $E(x)$ est le plus gand nombre entier relatif tel que $E(x) \leq x$. En utilisant la relation de Chasles, calculer, pour tous entiers relatifs m et n tels que $n \geq m$, $\int_m^n E(t)\,dt$

Solution : Soit entiers relatifs m et n tels que $n \geq m$, alors

$$\int_{m}^{n} E(t)\,dt = \sum_{k=m}^{n-1} \int_{k}^{k+1} E(t)\,dt = \sum_{k=m}^{n-1} \int_{k}^{k+1} k\,dt$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} k = \sum_{p=0}^{n-m-1} (m+p)$$

$$= m(n-m) + \sum_{p=0}^{n-m-1} p = m(n-m) + \frac{(n-m-1)(n-m)}{2}$$

$$= \frac{(n-m)(n+m-1)}{2}$$

Exercice 8.

Soit φ une fonction C^1 sur $[a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_{a}^{b} \varphi(t)\sin(nt)\,dt$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$.

Solution :

On fait une intégration par partie, on intégre $t \mapsto \sin(nt)$ et on dérive φ :

$$u_n = \Big[\frac{-\cos(nt)}{n}\varphi(t)\Big]_a^b - \int_{a}^{b} \frac{-\cos(nt)}{n}\varphi'(t)dt$$

. On va montrer que les deux membres de l'équation tendent vers 0 quand $n \to \infty$. Commençons par

$$\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\varphi(t)\right]_a^b$$

Comme φ est C^1 elle est aussi continue, donc majorée sur $[a,b]$ disons par M_φ. On a donc :

$$\begin{aligned}
\left|\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\varphi(t)\right]_a^b\right| &= \left|\frac{1}{n}(-\cos(nb)\varphi(b)+\cos(na)\varphi(a))\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n}(|\cos(nb)\varphi(b)|+|\cos(na)\varphi(a)|) \qquad \textit{inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \frac{2M_\varphi}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \to 0
\end{aligned}$$

Pour le terme

$$\int_a^b \frac{-\cos(nt)}{n}\varphi'(t)dt$$

c'est la même démarche mais en plus technique : Comme φ is C^1, φ' est continue donc majorée sur $[a,b]$, disons par M. On peut aussi écrire, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \frac{-\cos(nt)}{n}\varphi'(t)dt\right| &\leqslant \int_a^b \left|\frac{-\cos(nt)}{n}\varphi'(t)\right|dt \\
&\leqslant \frac{1}{n}\int_a^b M dt \\
&\leqslant \frac{1}{n}(b-a)M \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat.