Feuille 11
intégration 1

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Exercice 1 ((C) Premiers calculs)**.** Déterminer les primitives des fonctions suivantes, puis calculer l'intégrale demandée.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |t|$. Calculer $\int_{-1}^{1} f(t)dt$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sin(t)$ (*resp.* $\cos(t)$). Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.
3. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Calculer $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$ et déterminer si $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ existe.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_-^x f(t)dt$. Déterminer si $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)dt$ existe.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(t)^2$. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

Exercice 2 ((C) Intégrations par parties)**.** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(t)$. Calculer, pour tout $x > 0$, $\int_1^x f(t)dt$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t\cos(t)$. Calculer $\int_0^{\pi} t\cos(t)dt$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2 e^t$. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t)dt$.
4. $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_1^x f(t)dt$.

Exercice 3 ((C) Changement de variable)**.** En utilisant des changements de variables, calculer :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt \qquad I_2 = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch(t)}}dt \qquad I_3 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)dt \qquad I_5 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t}dt.$$

Exercice 4. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ dérivable de dérivée $f' > 0$ et continue.

1. Si l'on note $c = f(a)$ et $d = f(b)$ que représente graphiquement la quantité :
$$\int_c^d f^{-1}(t)dt$$
2. En déduire la formule suivante :
$$\int_c^d f^{-1}(t)dt + \int_a^b f(t)dt = bd - ca$$

3. Retrouver ce résultat en faisant successivement une intégration par partie et un changement de variable dans l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)dt$$

Exercice 5. Soit f une fonction intégrable et périodique de période T, définie sur $\mathbb{R}$. Soit a et b deux réels quelconques.

Montrer que

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt$$

Exercice 6.

1. Soit f une fonction intégrable et impaire définie sur un intervalle $[-a,+a]$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt = 0$$

2. Soit f une fonction intégrable et paire définie sur un intervalle $[-a,+a]$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt = 2\int_0^a \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$$

Exercice 7. On rappelle que si $x \in \mathbb{R}$, sa partie entière $E(x)$ est le plus gand nombre entier relatif tel que $E(x) \leq x$. En utilisant la relation de Chasles, calculer, pour tous entiers relatifs m et n tels que $n \geq m$, $\int_m^n E(t)\,dt$

Exercice 8.

Soit φ une fonction C^1 sur $[a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\,dt$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$.