Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M002, Corrigé de l'examen du 8 mars 2014 (2h30), sections MIPI 21, 22 & 23

Cet examen comporte **5** exercices et est noté sur **26**. (Le total des points fait 30 et les notes > 26 seront ramenées à 26.)

Exercice 1 (5 pts)**.** Soit $\mathcal{S}$ le système linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = b_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 = b_4 \end{cases}$

1. Écrire la matrice A du système, puis la matrice augmentée.

Solution : Le système s'écrit $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$. La matrice augmentée est :

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & b_2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & b_3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 & b_4 \end{array}\right).$$

2. En faisant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer rang(A) et une ou des équation(s) de Im(A). Vous indiquerez les opérations élémentaires effectuées.

Solution : Partant de la matrice $(A \mid b)$ ci-dessous, soustrayons L_1 de L_2 et de L_3 et remplaçons L_4 par $L_4 - 2L_1$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & b_3 - b_1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & b_4 - 2b_1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 3L_2]{L_3 \to L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 + b_1 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 + b_1 - 3b_2 \end{array}\right).$$

On voit ainsi que A est de rang 3 et que Im(A) est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des b qui vérifient l'équation $b_4 + b_1 - 3b_2 = 0$.

3. Préciser les variables libres et donner des équations de Ker(A).

Solution : Avec les opérations que l'on a effectuées, la variable x_4 est libre et Ker(A) est donné par le système $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ qui équivaut à $x_1 = 0 = x_2$ et $x_3 = -x_4$.

4. Quelle est la dimension de Ker(A) ? En déterminer une base.

Solution : D'après le théorème du rang, la dimension de l'espace de départ, ici 4, égale rang(A) + $\dim \mathrm{Ker}(A)$, donc $\dim \mathrm{Ker}(A) = 4 - 3 = 1$, ce qui était aussi visible sur les équations $x_1 = 0 = x_2$ et $x_3 = -x_4$: Ker(A) est engendré par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Résoudre le système lorsque $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ et $b_4 = 2$.

Solution : On a $b_4 + b_1 - 3b_2 = 2 + 1 - 3 = 0$, donc $b \in \mathrm{Im}(A)$ donc le système admet au moins une solution. On sait alors que l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ de direction Ker(A), i.e. toute solution est de la forme $X_0 + x_4 v$, où X_0 est une solution particulière choisie arbitrairement, par exemple en prenant $x_4 = 0$; on obtient alors le système $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = b_1 = 1 \\ x_2 + x_3 = b_2 - b_1 = 0 \\ x_3 = b_3 + b_1 - 2b_2 = 0 \end{cases}$ qui donne $x_3 = 0 = x_4$, $x_2 = 0$, $x_1 = 1$. Donc $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution particulière et l'on a $\mathcal{E} = \left\{ X_0 + x_4 v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 2 (4 pts)**.** Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$. On considère le déterminant $V(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$.

1. Montrer que $V(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$. (On pourra faire des opérations sur les lignes puis développer par rapport à la 1ère colonne.)

<u>Solution</u> : En remplaçant L_3 par $L_3 - a_1 L_2$ on obtient que $V(a_1, a_2, a_3)$ égale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & (a_2 - a_1)a^2 & (a_3 - a_1)a_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - a_1 L_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & (a_2 - a_1)a_2 & (a_3 - a_1)a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ (a_2 - a_1)a_2 & (a_3 - a_1)a_3 \end{vmatrix}$$

où la dernière égalité est obtenue en développant par rapport à la 1ère colonne. Mettant $(a_2 - a_1)$ en facteur dans la 1ère colonne et $(a_3 - a_1)$ dans la 2ème, on obtient que

$$V(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & e^{it} & e^{2it} \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Calculer D. Quand a-t-on $D = 0$?

<u>Solution</u> : On a $D = \text{dét}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & e^{it} & -1 \\ 4 & e^{i2t} & 1 \end{pmatrix}$. Comme $\text{dét}(A) = \text{dét}({}^tA)$ et comme $e^{2it} = (e^{it})^2$, on obtient que :

$$D = V(2, e^{it}, -1) = -3(e^{it} - 2)(-1 - e^{it}) = 3(e^{it} - 2)(1 + e^{it}).$$

Par conséquent, comme e^{it} est de module 1 donc distinct de 2, on a $D = 0$ si et seulement si et seulement si $e^{it} = -1$ c.-à.-d. si $t = \pi$ modulo 2π.

3. Soient $R = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & \cos(t) & \cos(2t) \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ et $S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \sin(t) & \sin(2t) \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. En utilisant la question précédente, exprimer R et S en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.

<u>Solution</u> : Comme $(1, e^{it}, e^{2it}) = (1, \cos(t), \cos(2t)) + i(0, \sin(t), \sin(2t))$ et comme le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne (et chaque colonne), on a $D = R + iS$, et comme $R, S \in \mathbb{R}$ on a donc $R = \mathcal{R}e(D)$ et $S = \mathcal{I}m(D)$. Comme

$$D = 3\Big(\cos(t) - 2 + i\sin(t)\Big)\Big(1 + \cos(t) + i\sin(t)\Big) = 3\Big(\cos(t)^2 - \cos(t) - 2 - \sin(t)^2 + i\sin(t)(2\cos(t) - 1)\Big)$$

on obtient $S = 3\sin(t)(2\cos(t) - 1))$ et $R = 3(\cos(t)^2 - \cos(t) - 2 - \sin(t)^2) = 3(2\cos(t)^2 - \cos(t) - 3)$, la dernière égalité résultant de $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$.

4. Pour quelles valeurs de t a-t-on $S = 0$?

Solution : $S = 3\sin(t)(2\cos(t) - 1))$ est nul si et seulement si $\sin(t) = 0$ i.e. $t = 0$ modulo π, ou si $\cos(t) = 1/2$ i.e. $t = \pm\pi/3$ modulo 2π.

5. (bonus) Pour quelles valeurs de t a-t-on $R = 0$?

Solution : $R = 3(2\cos(t)^2 - \cos(t) - 3)$ est nul si et seulement si $\cos(t)$ est racine du polynôme $P = 2X^2 - X - 3$. Le discriminant est $1 + 24 = 25$ donc les racines sont $(1 - 5)/4 = -1$ et $(1 + 5)/4 = 3/2$. Comme $\cos(t) = 3/2$ est exclu, alors $R = 0$ si et seulement si $\cos(t) = -1$ c.-à.-d. si $t = \pi$ modulo 2π.

Exercice 3 (6 pts)**.** Soit $(*_0)$ l'équation différentielle linéaire homogène $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$. On rappelle que l'ensemble E de ses solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique solution telle que $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$.

1. Écrire le polynôme (ou équation caractéristique) associé(e) à $(*_0)$ et déterminer ses racines dans $\mathbb{R}$.

Solution : Le polynôme est $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, ses racines sont 1 et 2.

2. Donner une base $\mathcal{B} = (f, g)$ de E, puis exprimer u dans cette base.

Solution : Comme les racines de P sont $1 \neq 2$, une base $\mathcal{B}$ de E est donnée par les fonctions $f(t) = e^t$ et $g(t) = e^{2t}$. Il existe donc un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = af + bg$ et l'on a donc $u' = af' + bg' = af + 2bg$. Prenant les valeurs en $t = 0$ on obtient le système :

$$\begin{cases} a + b = u(0) = 0 \\ a + 2b = u'(0) = 1 \end{cases}$$

On en déduit $b = 1$ et $a = -b = -1$, donc $u(t) = -e^t + e^{2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit $(**)$ l'équation différentielle linéaire $z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{it}$, où z est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

3. Déterminer une solution $z_0(t)$ de $(**)$ de la forme $z_0(t) = Ce^{it}$, pour un $C \in \mathbb{C}$ que l'on déterminera.

Solution : Pour $z_0(t) = Ce^{it}$, on a $z_0'(t) = Cie^{it}$ et $z_0''(t) = Ci^2e^{it}$ donc

$$z_0''(t) - 3z_0'(t) + 2z_0(t) = C(i^2 - 3i + 2)e^{it} = P(i)Ce^{it} = (1 - 3i)Ce^{it}$$

et ceci égale e^{it} si et seulement si $C = \dfrac{1}{1 - 3i} = \dfrac{1 + 3i}{10}$.

Soit $(*)$ l'équation différentielle $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = t\cos(t)$.

4. Montrer que $x_0(t) = \mathcal{R}e(z_0(t))$ est solution de $(*)$ puis déterminer toutes les solutions de $(*)$.

Solution : En prenant la partie réelle des deux membres de l'égalité $z_0''(t) - 3z_0'(t) + 2z_0(t) = e^{it}$ on obtient $x_0''(t) - 3x_0'(t) + 2x_0(t) = \cos(t)$ Ceci montre que $x_0(t)$ est une solution de $(*)$. Alors toute solution v de $(*)$ s'écrit de façon unique $v = x_0 + af + bg$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Exprimer $x_0(t)$ puis $x_0'(t)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.

Solution : Comme $z_0(t) = \dfrac{1 + 3i}{10}(\cos(t) + i\sin(t))$ on a $x_0(t) = \dfrac{1}{10}(\cos(t) - 3\sin(t))$ et donc $x_0'(t) = \dfrac{-1}{10}(\sin(t) + 3\cos(t))$.

6. Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique solution de $(*)$ telle que $v(0) = 0$ et $v'(0) = -1/2$. Exprimer v en fonction de x_0, f et g.

Solution : v s'écrit de façon unique $v = x_0 + af + bg$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors $v' = x_0' + af' + bg' = x_0' + af + 2bg$. Prenant les valeurs en $t = 0$, on obtient le système

$$\begin{cases} \dfrac{1}{10} + a + b = v(0) = 0 \\ \dfrac{-3}{10} + a + 2b = v'(0) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

d'où $b = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{4}{10} = \dfrac{-1}{10}$ puis $a = 0$. Donc $v(t) = \dfrac{1}{10}(\cos(t) - 3\sin(t) - e^{2t})$.

Exercice 4 (7 pts)**.** On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \end{cases} ;$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau des variations de f et tracer approximativement son graphe en prenant approximativement 2 cm comme unité de longueur sur chacun des axes.

Solution : f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{-1}{2}(x+1)^{-3/2}$. On a $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ donc f est strictement décroissante et l'on a le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

On renvoie à la figure 1 pour le graphe de f.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \in [1/2, 3]$.

Solution : Comme $f(\mathbb{R}_+) \subset]0,1] \subset \mathbb{R}_+$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. De plus, comme f est décroissante, $f([0,3]) \subset [f(3), f(0)] = [1/2, 1]$ et donc on a $u_n \in [1/2, 3]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et même $u_n \in [1/2, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

3. Calculer et comparer u_1 et u_2. Représenter graphiquement sur le graphe de f les termes $u_0, \dots, u_4$.

Solution : On a $u_1 = f(3) = 1/2$ et $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3/2}} = \sqrt{2/3}$. Il est clair que $u_2 < 1 < u_0$, et comme $u_1^2 = \dfrac{1}{4} < \dfrac{2}{3} = u_2^2$, on a $u_1 < u_2$.

4. Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Solution : Notons $f^2 = f \circ f$. Comme f est strictement décroissante alors f^2 est strictement croissante. Comme $u_0 > u_2$ on a donc $u_0 > u_2 > u_4 > \cdots$ donc la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Comme f est strictement décroissante, on a $u_1 = f(u_0) < f(u_2) = u_3 < u_5 = f(u_4) < \cdots$ donc la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

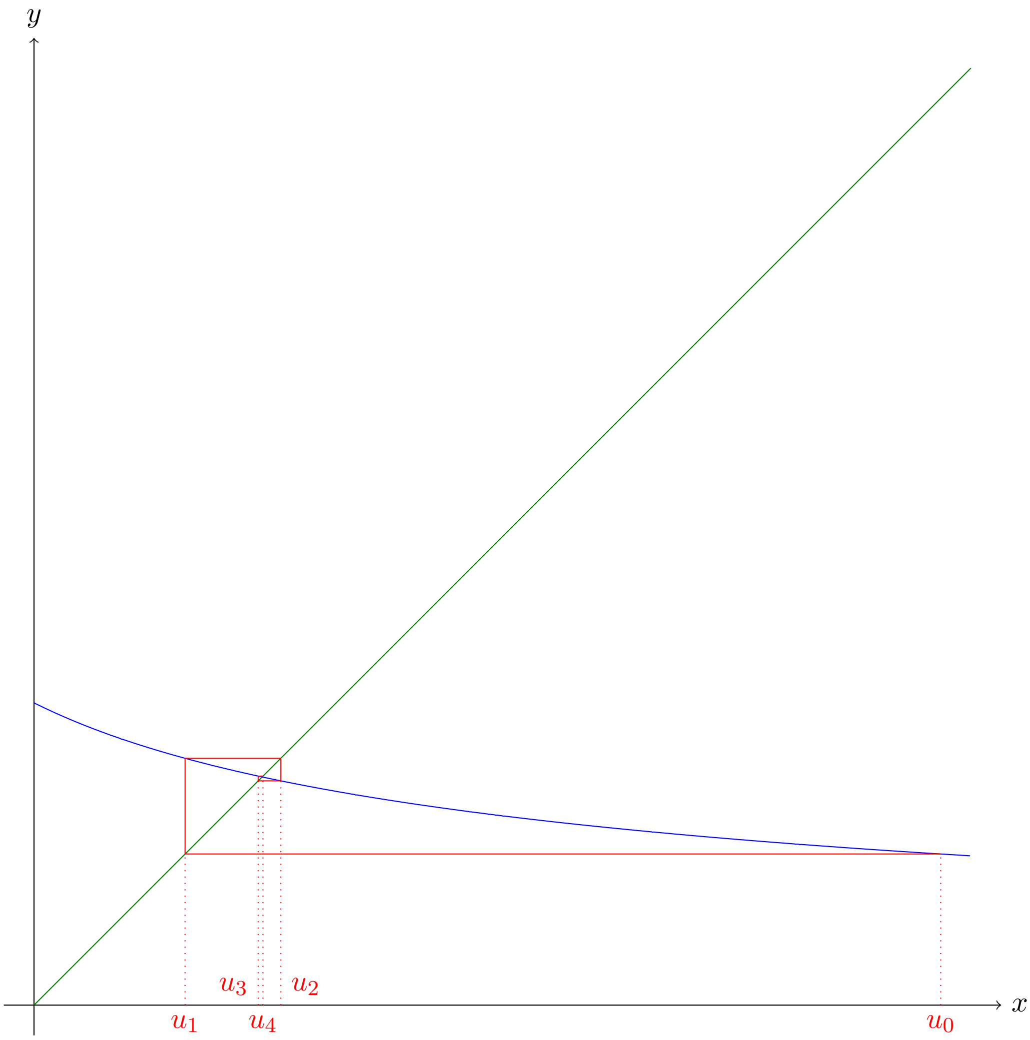

FIGURE 1 – Le graphe de f (en bleu) et les 5 premiers termes de la suite

5. Déterminer un réel $k \in]0,1[$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - u_{n-1}|$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $|f'(x)| = \dfrac{1}{2(x+1)^{3/2}} \leq \dfrac{1}{2}$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$ on a $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$. Appliquant ceci à $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$ on obtient $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - u_{n-1}|$.

6. En étudiant les variations de $g(x) = f(x) - x$, montrer que f admet dans $\mathbb{R}_+$ un unique point fixe p. Montrer de plus que $p \in [1/2, 1]$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ donc $g(x)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On a vu à la question 2 que $g(1/2) = f(u_1) - u_1$ est > 0 et l'on a $g(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 < 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $p \in]0,1[$ tel que $g(p) = 0$. Comme g est strictement décroissante, p est l'unique zéro de g dans $\mathbb{R}_+$, donc l'unique point fixe de f dans $\mathbb{R}_+$.

7. Montrer par récurrence que $|u_n - p| \leq \dfrac{5}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers p.

Solution : Comme $u_0 = 3$ et $p > 1/2$ on a $|u_0 - p| < 5/2$, d'où le résultat demandé pour $n = 0$. Supposons avoir montré que $|u_n - p| \leq \dfrac{5}{2^{n+1}}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la question 5, on a

$$|u_{n+1} - p| = |f(u_n) - f(p)| \leq \frac{1}{2}|u_n - p| \leq \frac{5}{2^{n+2}}.$$

Ceci montre, par récurrence sur n, que $|u_n - p| \leq \dfrac{5}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, Comme la suite $\dfrac{5}{2^{n+1}}$ converge vers 0, il résulte du théorème des gendarmes que la suite $|u_n - p|$ converge aussi vers 0, donc que la suite u_n converge vers p.

Exercice 5 (8 pts)**.** On note $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| \leq 1\}$ et on définit la fonction

$$F : \begin{cases} D & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z^3 + 3i}{4} \end{cases};$$

1. Montrer que $F(D)$ est inclus dans D.

Solution : Pour tout $z \in D$, on a $|z^3| = |z|^3 \leq 1$ et donc $|F(z)| \leq \dfrac{1}{4}(|z|^3 + 3|i|) \leq 1$. On a donc $F(D) \subset D$.

2. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que tous ses termes sont dans D.

Solution : Comme $u_0 \in D$ et $F(D) \subset D$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tous ses termes sont dans D.

3. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, montrer que $X^3 - a^3 = (X - a)Q(X)$ pour un polynôme Q de degré 2 que l'on déterminera. (On pourra faire la division euclidienne de $X^3 - a^3$ par $X - a$.)

Solution : On peut savoir par coeur que $(X-a)(X^2+aX+a^2) = X^3-a^3$, ce qui se vérifie immédiatement en calculant le produit dans le terme de gauche. Ou bien on peut faire la division euclidienne suggérée :

$$\begin{array}{rrr|l} X^3 & & -a^3 & X - a \\ \hline & aX^2 & -a^3 & X^2 + aX + a \\ & & a^2X - a^3 & \\ & & 0 & \end{array}$$

4. Déduire de la question 3 que pour tous x et y dans D, on a $|F(x) - F(y)| \leq \dfrac{3}{4}|x - y|$.

Solution : Pour $x, y \in D$ on a $F(x) - F(y) = \dfrac{1}{4}(x^3 - y^3) = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{4}(x - y)$ et comme x^2, xy et y^2 sont tous les trois de module ≤ 1, on obtient

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{|x^2| + |xy| + |y^2|}{4}|x - y| \leq \frac{3}{4}|x - y|.$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{3}{4}|u_n - u_{n-1}|$.

Solution : Comme $u_{n+1} = F(u_n)$ et $u_n = F(u_{n-1})$, ceci découle de la question précédente appliquée à $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$.

6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En déduire qu'elle est convergente. Notons ℓ sa limite.

Solution : Posons $k = 3/4$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons avoir montré que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n\,|u_1 - u_0|$ (ce qui est le cas pour $n = 0$). Alors on a :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |F(u_{n+1}) - F(u_n)| \leq k\,|u_{n+1} - u_n| \leq k^{n+1}\,|u_1 - u_0|.$$

Ceci montre, par récurrence, que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n\,|u_1 - u_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $p < q$, écrivant que

$$u_q - u_p = (u_q - u_{q-1}) + (u_{q-1} - u_{q-2}) + \cdots + (u_{p+1} - u_p)$$

on obtient que $|u_q - u_p| \leq (k^{q-1} + k^{q-2} + \cdots + k^p)\,|u_1 - u_0|$. Or

$$k^{q-1} + k^{q-2} + \cdots + k^p = k^p(1 + k + \cdots + k^{q-p-1}) = k^p\frac{1-k^{q-p}}{1-k} \leq k^p\frac{1}{1-k}$$

et donc, pour tout $p \leq q$ on a $|u_q - u_p| \leq \dfrac{k^p}{1-k}|u_1 - u_0|$. Comme $k = 3/4$, la suite $(k^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et il en résulte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. D'après un théorème du cours, elle converge donc vers une limite ℓ.

7. Montrer que $\ell \in D$ et $F(\ell) = \ell$.

Solution : Comme $|u_n| \leq 1$ pour tout n et comme les inégalités larges sont préservées par passage à la limite, on a aussi $|\ell| \leq 1$ i.e. $a \in D$.
Comme F est continue en ℓ, la suite $(F(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(\ell)$; mais comme $F(u_n) = u_{n+1}$ cette suite converge aussi vers ℓ. Par unicité de la limite, on a donc $F(\ell) = \ell$.

8. Est-ce que la limite ℓ dépend du choix de la condition initiale $u_0 \in D$? Justifiez votre réponse.

Solution : D'après la question 5, l'application $F : D \to D$ est contractante de rapport $k = 3/4$. Montrons que ℓ est son unique point fixe dans D. Si ℓ' en est un autre, on a $|\ell' - \ell| = |F(\ell') - F(\ell)| \leq \dfrac{3}{4}|\ell' - \ell|$, d'où $\ell = \ell'$. Par conséquent, comme vu plus haut, pour tout $u_0 \in D$ la suite définie par $u_{n+1} = F(u_n)$ converge vers ce point fixe ℓ. La limite ℓ ne dépend donc pas du choix du point u_0 dans D.