1M002 - Suites et intégrales, algèbre linéaire
Devoir n°2 [15 pts] Durée : 1h

- **Aucun document autorisé. Appareils électroniques (calculatrice, téléphone...) interdits.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Pensez à écrire vos nom et prénom sur toutes vos copies.**

Exercice 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère le système linéaire suivant en les variables x, y, z, t :

$$\begin{cases} -x + 3y + z + t = 2 \\ x - 2y + z + t = 2 \\ x - 2y - 2z + t = 1 \\ x - y + at = b \end{cases}$$

1. A quelle(s) condition(s) le système admet-il des solutions ?
2. Dans ce(s) cas, décrire l'ensemble des solutions du système.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 .
2. Vérifier l'identité $A^2 - 2A = 8I$, où I désigne la matrice identité de taille 3×3 .
3. Dédurre du point précédent que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. Pour $n \geq 2$, on considère la matrice A_n de taille $n \times n$ définie par

$$A_2 = \begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} a+b & a & 0 \\ b & a+b & a \\ 0 & b & a+b \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \geq 4, A_n = \begin{pmatrix} a+b & a & 0 & & 0 \\ b & a+b & a & \ddots & \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & a+b & a \\ 0 & & 0 & b & a+b \end{pmatrix}$$

et on définit $\Delta_n = \det(A_n)$.

1. Calculer les déterminants de A_2 et A_3 . On simplifiera au maximum les expressions trouvées.
2. Montrer que pour tout $n \geq 4$, $\Delta_n = (a+b)\Delta_{n-1} - ab\Delta_{n-2}$.
3. En déduire par récurrence que $\forall n \geq 2$, $\Delta_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.
4. Déterminer quand le système linéaire en x, y, z

$$\begin{cases} (a+b)x + ay & = c_1 \\ bx + (a+b)y + az & = c_2 \\ by + (a+b)z & = c_3 \end{cases}$$

admet une unique solution pour tout $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$.