Devoir surveillé 1

Durée 1h30. Sur 15 points

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. La correction tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **4** exercices indépendants ainsi qu'une question de cours qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :

Cours : 2 points ; Exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 5 points. Le total est de 20 points et la note sera ramenée sur **15**.

Question de cours : Soit u et v deux suites de l'espace $\mathbf{S_K}$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Donnez les trois opérations élémentaires autorisées dans cette espace.

Exercice 1. Déterminer la limite des suites définies par :

1. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
2. $v_n = \dfrac{e^{i\pi n/9} + e^{i\pi n/11}}{\ln(n+2)}$
3. $w_n = n^2 \ln(\cos(1/n))$

Exercice 2. Vrai ou faux ? Veuillez justifier votre réponse.

1. La suite $(\ln(n+\sin(n)))_{n\geqslant 1}$ admet une sous-suite convergente.
2. Soit $f(x) = \sqrt{1-x}$. La suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ admet une sous-suite convergente
3. Il existe un réel a tel que la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \cos(a_n) + 1$ admette une sous-suite convergente.

Exercice 3.

Soient f une fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = x_0$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

1. Étude de f :
   a) Étudier le sens de variation de f.
   b) Quelle est la limite de f en $+\infty$?
2. Étude de (u_n) :
   a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer son sens de variation en fonction de $u_0 = x_0$.
   b) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4. Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}. \tag{1}$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
2. Établir que pour tout entier n on a $v_{2n} \geqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$
3. En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ.
4. (BONUS) Montrer que la propriété démontrée à la question précédente reste vraie même si l'on ne suppose pas que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.