Université Paris II **Mathématiques 1**
L1 Sciences Economiques et Gestion Cours de Mme Hayek

T.D. n°5-6 À distribuer du 10 au 14 octobre 2016
Fonctions de plusieurs variables, À traiter du 21 au 25 novembre 2016
Optimisation et du 5 au 9 décembre 2016

Exercice 1
Pour chacune des fonctions suivantes donner l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité et calculer les dérivées partielles.

$f(x_1, x_2) = 8x_1 - 5x_2$

$f(x_1, x_2) = x_2^3 + x_1^2 + 2x_2 + 4x_1x_2 + 2x_1 + 5x_2 - 1$

$f(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

$f(x_1, x_2) = e^{(x_1^2+x_2^2)} + 3x_1 - x_2$

$f(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$

$f(x_1, x_2) = -\ln(1 - x_1^2 - x_2^2) + 5x_1$

Exercice 2
Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On définit F telle que $F(t) = f(e^{3t}, 3te^t)$, $t \in \mathbb{R}$.
a) Etudier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.
b) On pose $f(u, v) = u - uv^2$. Calculer dans ce cas F' de deux façons différentes.

Exercice 3
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3x_2}{x_1 + x_2}$$

a) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
b) Calculer la différentielle de f en $(1, 1)$ notée $df(1, 1)$.
c) Donner une valeur approchée de $f(1, 01; 1, 02)$ à l'aide de $df(1, 1)$.
d) Montrer que f est homogène de degré 3
e) Vérifier que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré 2.

Exercice 4
On considère la fonction $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 + 1)e^{x_1}$. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2

de f au voisinage de $(0, 0)$
Donner l'approximation affine de f au voisinage de $(0, 0)$ puis l'approximation quadratique de f au voisinage de $(0, 0)$.
Application: Donner les approximations pour $\vec{x} = (0,1; 0,2)$ et comparer avec la valeur $f(0,1; 0,2)$ donnée par une calculatrice.

Exercice 5
Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes

a) $f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^2 - 12x_1x_2$.

b) $g(x_1, x_2) = -6x_1^2 + 5x_1 - 4x_2^2 + 4x_1x_2$.

c) $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1 - 7$

d) $f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 - x_1^3 - x_2^3$

e) $f(x_1, x_2) = x_1(\ln^2 x_1 + x_2^2)$ pour $x_1 > 0$

Exercice 6
Montrer que les fonctions suivantes sont concaves :

$f(x_1, x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1x_2 - x_1 - 5x_2 + 7$

$f(x_1, x_2) = -8x_2^2 + 3x_2$

$f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ sur $I\!R_+^* \times I\!R_+^*$

Exercice 7
a) Etudier les extrema de la fonction suivante
$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_2 + 4$ sous la contrainte $-x_1 + x_2 = 2$.

b) On considère la fonction f de $I\!R_+^* \times I\!R_+^*$ dans $I\!R$ définie par : $f(x_1, x_2) = \ln(x_1x_2)$
Etudier les extrema de f sous la contrainte $x_1 + x_2 = 4$