Université Paris II | **Mathématiques 1**
L1 Sciences Economiques et Gestion | Cours de Mme Hayek

T.D. n°3-4 | À distribuer du 10 au 14 octobre 2016
Continuité Dérivabilité Optimisation | À traiter du 24 au 28 octobre 2016 et du 7 au 11 novembre 2016

Exercice 1

soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-x}{x-4}$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
b) Déterminer les points fixes de f (c'est-à-dire les valeurs de x telles que $f(x) = x$).
c) On appelle a et b ces points fixes ($a < b$). La fonction f est-elle continue sur $[a, b]$?
d) Donner alors les valeurs de m et M telles que $f([a, b]) = [m, M]$.

Exercice 2

a) Etudier la limite suivante :

$$\lim_{x \longrightarrow 5/2} \frac{|2x-5|}{x-5/2}$$

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |2x - 5|$
b) f est-elle continue en tout point a de $\mathbb{R}$?
c) Etudier la dérivabilité de f en $a \neq 5/2$.
d) Etudier la dérivabilité de f en $a = 5/2$.

Exercice 3

On considère la fonction f d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1 + e^x}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ 1 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

a) Calculer la limite de f lorsque x tend vers 0. f est-elle continue en 0 ?
b) Montrer que f est dérivable pour $x \neq 0$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$
c) Etudier la dérivabilité de f en 0
d) La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 4

Soit f une fonction non nulle en x et dérivable en x. On définit l'élasticité de f en x par $E(f/x) = f'(x)\dfrac{x}{f(x)}$.

a) Exprimer $E(f/x)$ en fonction de $\ln f(x)$.
b) Donner l'élasticité du produit fg en fonction des élasticités de f et de g.

c) Même question pour $\dfrac{f}{g}$.
d) Donner les élasticités des fonctions suivantes :
$f(x) = x^\alpha$, $(x \in I\!R_+^*,\ \alpha \in I\!R)$, $g(x) = 3x + 2$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $I\!R$ par $f(x) = \ln(e^x + 1)$.
Montrer que pour tous réels x et y : $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

Exercice 6

1) Calculer la limite quand x tend vers 0 de la fonction suivante

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-4x} - 1 + 2x + 3x^2}{x^2}$$

a) En appliquant la règle de l'Hôpital.
b) En utilisant le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de 0.

2) Calculer le développement limité de $g(x) = \ln(1 + 3x + x^2) - 3x$ à l'ordre deux au voisinage de 0 puis en déduire la nature du point d'abscisse 0 pour la fonction g.

Exercice 7

Etudier les extrema des fonctions suivantes définies par :
a) $f(x) = -4x^3 + 6x + 8$
b) $f(x) = -x\ln x + 3x + 1, \quad x \in I\!R_+^*$
c) $f(x) = (x - c)1000e^{-ax}, a > 0, c > 0$
d) $g(x) = x^3 - 12x + 4$
e) $f(x) = 4x^2 + 6x - 9$
f) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$
g) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 4$.
h) $f(x) = x^3 - x + 1$

Exercice 8

On considère la fonction f telle que

$$f(x) = -\sqrt{x^2+1} - x^2 + 6$$

a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
b) Montrer que f est strictement concave sur D.

Exercice 9

Soit $c \in I\!R$. On considère la fonction f telle que

$$f(x) = c\ln(x + 1) + x.$$

a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
b) Pour quelles valeurs de c, f est-elle convexe ?

c) Etudier le problème ci-dessous suivant les différentes valeurs de c :

$$\text{Minimiser } f(x), \quad x \in D$$

Exercice 10

Une entreprise a observé que pour un produit donné le coût total $C(q)$ (en milliers d'euros) de la production variait en fonction de la quantité produite q (en milliers de pièces) de la manière suivante :

$$C(q) = 4q^3 - 6q^2 + 15q$$

a) Quelle doit être la production q si l'entreprise cherche à minimiser le coût moyen ?
Écrire la fonction de coût marginal.
Vérifier que pour la valeur de q qui minimise le coût moyen, le coût marginal est égal au coût moyen minimum.
b) Démontrer que la propriété qui vient d'être vérifiée est générale : Soit $C(q)$ le coût total, q la quantité produite, $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ le coût moyen Caractériser la valeur q^* qui minimise le coût moyen et vérifier que dans ce cas, on a $C_M(q^*) = C'(q^*)$.

Exercice 11
On considère la fonction f d'une variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{2-x}{x-1} - \ln(x-1)$.

a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans D.

On considère à présent la fonction g d'une variable réelle définie par :
$g(x) = (2-x)\ln(x-1) + 5$.

c) Quel est l'ensemble de définition D de g ?
d) Montrer que g est dérivable sur D et calculer g'.
e) Montrer que g est strictement concave sur D.
f) Etudier les extrema de g sur D.
g) Etudier les extrema de g sur $[6, 10]$.