Université Paris II — **Mathématiques 1**
L1 Sciences Economiques et Gestion — Cours de Mme Hayek

T.D. n°2 — À distribuer du 26 au 30 Septembre 2016
Logique, Quantificateurs, Fonctions — À traiter du 10 au 14 octobre 2016

Exercice 1

Soit A, B et C trois propositions. Montrer que
a) NON(A OU B) = NON A ET NON B
b) A OU (B ET C) = (A OU B) ET (A OU C)

Exercice 2

Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes et leur négation. Préciser lesquelles sont vraies.
a) Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
b) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

Exercice 3

a) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{N}$ t.q. $y \leq x$
2. $\exists y \in Z$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R},\ y \leq x^2$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in Z$ t.q. $y \leq x$
4. $\exists y \in Z$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R},\ y \leq x$
5. $\forall p \in \mathbb{N},\ p^2$ pair $\Rightarrow$ p pair

b) Ecrire les négations des propositions ci-dessus.

Exercice 4

Pour les ensembles suivants donner, lorsque cela est possible majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum.

$[2,4]$, $[3,11]$, $\{x \in \mathbb{R}$ t.q. $x < 10\}$, $\{x \in \mathbb{N}$ t.q. $x < 10\}$, $\{2x - 1$ t.q. $x \in]-\infty, 0]\ \}$,
$\{x^2 - 1$ t.q. $x \in]-\infty, 0]\ \}$, $\{sinx$ t.q. $x \in \mathbb{R}\}$,
$\{x \in \mathbb{R}$ t.q. $x^2 + 3x - 4 = 0\}$, $\{x \in \mathbb{R}$ t.q. $x^2 + 3x - 4 \geq 0\}$.

Exercice 5

On considère la fonction $f(x) = x^3 - 3x$.
Pour les ensembles ci-dessous donner lorsque cela est possible majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum.

$A = \{f(x)$ t.q. $x \in [0,2]\ \}$

$B = \{f(x) \text{ t.q. } x \in [0, +\infty[\ \}$
$C = \{x \text{ t.q. } f(x) \in [-2, 0]\ \}$

Exercice 6

a) On considère la fonction l telle que

$$l(x) = \frac{3x^3 + x^2 + 5x}{6x^4 + x^3 + 2}$$

Trouver un équivalent de l quand x tend vers 0, puis un équivalent quand x tend vers $+\infty$ et justifier la réponse.
b) Trouver un équivalent de $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}$ quand x tend vers $-\infty$.

Exercice 7

a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^x - x - 2$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions , dont l'une est 0.
L'autre solution se note α. Démontrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x.$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que :

$$f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$$

où α est défini dans la partie a)
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.)
4. Etablir le tableau de variation de f