Exercices du cours: Structures et Algorithmes Aléatoires
cours 2 du 23 octobre 2009.

1. Montrer que $\mathbb{E}[X^k] \geq \mathbb{E}[X]^k$, pour tout $k \geq 1$ pair.

2. On considère une version déterministe de quicksort où le premier élément de la liste est choisi comme pivot. Quel est le nombre moyen de comparaisons si la liste en entrée est tirée uniformément parmi toutes les possibilitées?

3. Vous devez recruté un thésard et vous avez n candidats qui sont triés selon vos préférences. Les candidats se présentent à l'entretien dans un ordre aléatoire, mais à l'issue de l'entretien vous pouvez le classer parmi ceux que vous avez déjà vus. Si à la fin d'un entretien, vous ne proposé pas la thèse, vous perdez toute chance de sélectionner ce candidat comme thésard. Votre but est de proposer la thèse au meilleur candidat. On considère la stratégie suivante: faire passer un entretien à m candidats et tous les rejeter; à partir du $m+1$-ème candidat, choisir le candidat qui est meilleur que tous ceux vus jusqu'à présent. Montrer que la probabilité de choisir le meilleur candidat est:

$$P(n,m) = \frac{m}{n} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j-1}.$$

   En déduire que

$$\frac{m}{n}(\ln n - \ln m) \leq P(n,m) \leq \frac{m}{n}(\ln(n-1) - \ln(m-1)),$$

   et que $\lim_n \max_m P(n,m) \geq 1/e$.

4. Soit $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ avdc $|v_i| \leq 1$. Soit $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$ et $w = p_1 v_1 + \ldots p_n v_n$. Montrer qu'il existe $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{0,1\}$ tels que $v = \epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_n v_n$ et $|w - v| \leq \sqrt{n}/2$.

5. On rappelle que $R(k,\ell) > n$ signifie qu'il existe un 2-coloriage de K_n en rouge et bleu tel qu'il n'existe pas de K_k rouge ni de K_ℓ bleu. Montrer que s'il existe $p \in [0,1]$ tel que

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}} < 1,$$

   alors $R(k,t) > n$. En déduire que $R(4,t) \geq \Omega(t^{3/2}/(\ln t)^{3/2})$.

6. Montrer que $R(k,k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$.