

Examen du cours: Structures et Algorithmes Aléatoires

Temps conseillé: 1h.

1. Problème 1: on considère le modèle de graphe aléatoire vu en cours $G(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$: Ω est l'ensemble des graphes (simples, i.e. sans boucle ni arête multiple) ayant pour sommets $\{1, \dots, n\}$ et pour tout $G \in \Omega$

$$\mathbb{P}(G(n, p) = G) = p^{e_G} (1 - p)^{\binom{n}{2} - e_G},$$

avec e_G le nombre d'arêtes de G . Soit X_n le nombre de sommets isolés dans $G(n, p)$. Soit $c_n = np - \log n$. Toutes les limites sont prises quand n tend vers l'infini.

- (a) Montrer que si $c_n \rightarrow \infty$ alors $\mathbb{P}(X_n > 0) \rightarrow 0$.
 - (b) Montrer que si $c_n \rightarrow -\infty$ alors $\mathbb{P}(X_n > 0) \rightarrow 1$.
 - (c) Montrer que si $c_n \rightarrow c$ alors $\mathbb{P}(X_n = k) \rightarrow \mathbb{P}(Po(e^{-c}))$ où pour tout $\lambda > 0$, $Po(\lambda)$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ .
2. Problème 2: dans un graphe $G = (V, E)$ ayant pour ensemble de sommets V et pour arêtes E , on note d_v le degré du sommet v : $d_v = |\{w \in V, (v, w) \in E\}|$. Un ensemble stable est un ensemble de sommets n'ayant pas d'arête entre eux. La taille d'un ensemble stable est le cardinal de l'ensemble. Soit $\alpha(G)$ la taille maximale d'un ensemble stable de G .

- (a) Montrer que $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}$.
- (b) Soit $n \geq m$. On définit alors e comme suit: soit q, r le quotient et reste dans la division de n par m , $n = mq + r$ avec $0 \leq r < m$. Alors $e = r \binom{q+1}{2} + (m - r) \binom{q}{2}$. Soit $G_{n,e}$ le graphe ayant n sommets et e arêtes, constitué par la réunion disjointe de m cliques ayant q ou $q + 1$ sommets. En particulier $\alpha(G_{n,e}) = m$. Montrer que pour tout graphe H ayant n sommets et e arêtes, on a $\alpha(H) \geq m$.
- (c) Montrer que pour tout graphe H ayant n sommets et e arêtes, si $\alpha(H) = m$ alors H est isomorphe à $G_{n,e}$ (c'est à dire, il existe une bijection ϕ de l'ensemble des sommets de H vers l'ensemble des sommets de $G_{n,e}$ telle que si (i, j) est une arête de H alors $(\phi(i), \phi(j))$ est une arête de $G_{n,e}$).