énumère les sites de S de 1 à $N = M^2$, on retrouve bien la situation décrite plus haut. Précisons maintenant la distribution π. On prendra

$$\pi(z(s), s \in S) = \frac{\exp\{-\mathcal{E}(z)\}}{K}$$

où $\mathcal{E}(z)$ est l'énergie de la configuration $z = (z(s), s \in S)$: $\mathcal{E}(z) = H \sum_{s \in S} z(s) + J \sum_{\langle s,t \rangle} z(s)z(t)$ (la deuxième somme porte sur toutes les paires de sites voisins) et K est une constante de normalisation, en général incalculable numériquement. (Pour les physiciens H est le champ magnétique externe, et J est l'énergie interne d'une paire de dipôles voisins orientés dans le même sens.) La probabilité conditionnelle jouant le rôle de (8.45),

$$\pi(y(s) \,|\, z(t), t \in S - \{s\}) = \frac{\pi(y(s), z(t), t \in S - \{s\})}{\sum_{z(s) \in \Lambda} \pi(z(s), z(t), t \in S - \{s\})} \,,$$

prend la forme (faire le calcul)

$$\pi(y(s) \,|\, z(t), t \in S - \{s\}) = \frac{\exp\{\mathcal{E}(s,z)\}}{\exp\{\mathcal{E}_{+1}(s,z)\} + \exp\{\mathcal{E}_{+1}(s,z)\}} \,, \tag{8.46}$$

où $\mathcal{E}(s,z) = y(s)\,(H + J \sum z(v(s)))$ et où la somme porte sur tous les sites $v(s)$ voisins de s. En physique, on appelle $\mathcal{E}(s,z)$ l'énergie locale au site s de la configuration $(y(s), z(t), t \in S - \{s\})$, et $\mathcal{E}_{+1}(s,z)$ et $\mathcal{E}_{+1}(s,z)$ sont les valeurs de cette énergie locale correspondant aux directions $+1$ et -1 respectivement de l'orientation du dipôle placé en s. L'échantillonneur de Gibbs fonctionne donc dans le cas présent de la façon suivante : si au temps n on a la configuration $z = (z(s), s \in S)$, on choisit un site complètement au hasard (distribution uniforme). Si c'est le site s qui a été tiré au sort, on tire au sort la nouvelle phase $y(s)$ de ce site s selon la probabilité (8.46). On notera que ce choix est fait selon les principes de la physique statistique décrit quelques lignes plus haut.

8.5 Exercices

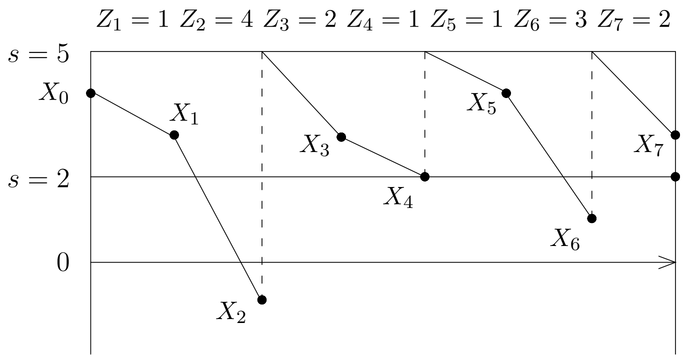
Exercice 8.5.1. Un contre-exemple.
La propriété de Markov ne dit pas que le présent et le futur sont indépendants étant donné une information *quelconque* sur le présent. Trouvez un exemple simple de CMH $\{X_n\}_{n \geq 0}$ avec l'espace d'état $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tel que

$$P(X_2 = 6 \mid X_1 \in \{3,4\}, X_0 = 2) \neq P(X_2 = 6 \mid X_1 \in \{3,4\}).$$

Exercice 8.5.2.
Démontrez l'égalité (8.2).

Exercice 8.5.3.
Démontrez le Théorème 8.1.5.

Exercice 8.5.4. GESTION DES STOCKS.
Une marchandise donnée A est stockée en vue de satisfaire à la demande. La demande totale entre le temps n et le temps $n+1$ est de Z_{n+1} unités, et on suppose que la suite $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ est IID, et indépendante de la valeur initiale X_0 du stock. Le remplissage du stock a lieu aux temps $n+0$ (c'est-à-dire, immédiatement après le temps n) pour tout $n \geq 1$.



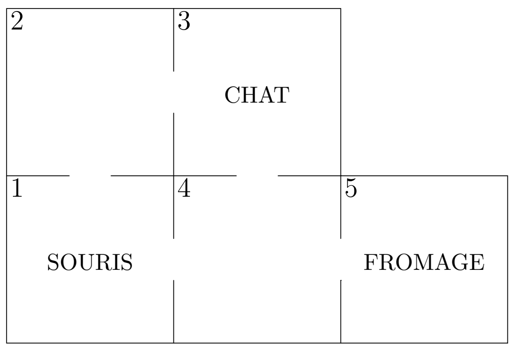
Une stratégie de gestion populaire est la stratégie (s, S), où s et S sont des entiers tels que $0 < s < S$. Avec cette politique de gestion, si le niveau du stock au temps n est plus gret que s, alors le stock est ramené au niveau S autemps $n+0$. Autrement, rien n'est fait. Le stock initial X_0 est supposé inférieur ou égal à S, et donc $\{X_n\}_{n\geq 1}$ prend ses valeurs dans $E = \{S, S-1, S-2, \ldots\}$. (Voir la figure.) Les valeurs négatives du stock sont admises, avec interprétation qu'une commande non satisfaite est immédiatement honorée après restockage. Montrez que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est une CMH et donnez sa matrice de transition.

Exercice 8.5.5. $*$ RECORDS.
Soit $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ une suite IID de variables géometriques (pour $k \geq 0$, $P(Z_n = k) = (1-p)^k p$, où $p \in (0,1)$). Soit $X_n = \max(Z_1, \ldots, Z_n)$ la *valeur record* au temps n, où on suppose que X_0 est une variable à valeurs entières et indépendante de la suite $\{Z_n\}_{n\geq 1}$. Montrez que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une CMH et donnez sa matrice de transition.

Exercice 8.5.6. $*$ LA VIE DES GANGSTERS.
Trois personnages armés, A, B, et C, se trouvent soudainement en présence au carrefour d'une rue de Washington, D.C., et sur ce, se mettent tout naturellement à se tirer dessus. Chaque survivant tire sur un autre survivant de son choix toutes les 10 secondes. Les probabilités d'atteindre la cible pour A, B, et C sont respectivement α, β, et γ. A est le plus haï des trois, et donc, tant qu'il vit, B et C s'ignorent et lui tirent dessus. Pour des raisons historiques que nous ne développerons pas, A ne peut pas sentir B, et donc il ne

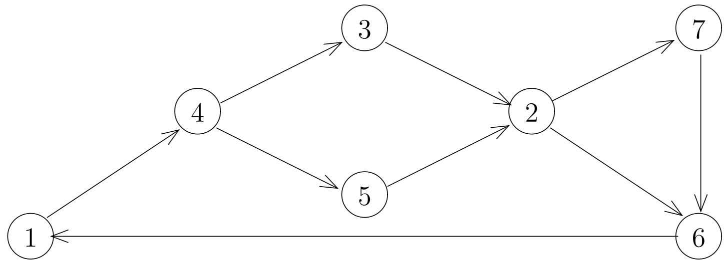
tire que sur B tant que ce dernier est vivant. Le bienheureux C n'est visé que lorsqu'il se trouve en présence de A seul ou B seul. Quelles sont les chances de survie de A, B, et C, respectivement ?

Exercice 8.5.7. $*$ Le chat, la souris et le gruyère.
Une souris affairée se promène dans un labyrinthe. Si au temps n elle se trouve dans une pièce avec k portes, elle en choisit une avec la probabilité $\frac{1}{k}$ et se retrouve à l'instant $n+1$ dans la pièce à laquelle cette porte conduit. Un chat paresseux attend dans la pièce numéro 3, et il y a un morceau de fromage dans la pièce numéro 5. La souris commence son périple dans la pièce 1. Avec quelle probabilité goûtera-t-elle du fromage avant que le chat ne la dévore ?



La chambre au gruyère

Exercice 8.5.8.
Montrez que le graphe de transition de la figure ci-dessous est irréductible. Donnez sa période et ses classes cycliques.



Exercice 8.5.9.
Montrez qu'une matrice de transition $\mathbf{P}$ avec au moins un état $i \in E$ tel que $p_{ii} > 0$ est apériodique.

Exercice 8.5.10. $*$
Montrez que la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ n'a pas de distribution stationnaire.

Exercice 8.5.11.
Est-ce que la CMH de l'Exemple 8.1.9 est réversible ?

Exercice 8.5.12.
Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ la CMH de l'Exemple 8.1.7.

(1) Montrez qu'elle est réversible ;

(2) Sachant $X_0 = 1$, calculez la distribution de probabilité de $T_1 = \inf\{n \geq 1;\ X_n = 1\}$, où on utilise la convention $\inf\{\varnothing\} = \infty$.

Exercice 8.5.13. $*$
Calculez la distribution stationnaire de la CMH d'espace d'état $E = \{1, 2, 3\}$ et de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\beta & \beta & \\ \gamma & 0 & 1-\gamma & \end{pmatrix},$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$. Est-elle réversible ?

Exercice 8.5.14. $*$
Démontrez le Théorème 8.2.1

Exercice 8.5.15. Les cailloux.
Des cailloux $S_1, \dots, S_M$ sont alignés. Au temps n un caillou est choisi au hasard, et ce caillou échange sa place avec le caillou placé juste devant lui. Si le caillou sélectionné est en tête, on ne change rien. Par exemple, avec $M = 5$: Si la situation juste avant le temps n est $S_2S_3S_1S_5S_4$ (S_2 est en tête), et si S_5 est tiré au sort, la nouvelle situation est $S_2S_3S_5S_1S_4$, tandis que si S_2 est sélectionné, la configuration reste la même. À chaque top de l'horloge, S_i est sélectionné avec la probabilité $\alpha_i > 0$. Notons X_n la situation au temps n, par exemple $X_n = S_{i_1} \cdots S_{i_M}$, avec l'interprétation que S_{i_j} est dans la j-ème position. Montrez que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une CMH irréductible récurrente positive et que sa distribution stationnaire est

$$\pi(S_{i_1} \cdots S_{i_M}) = C\alpha_{i_1}^{M}\alpha_{i_2}^{M-1} \cdots \alpha_{i_M},$$

où C est une constante de normalisation.

Exercice 8.5.16. Chaîne produit.
Soit $\{X_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ et $\{X_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ deux CMH avec la même matrice de transition $\mathbf{P}$. Montrez que le processus $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E \times E$ défini par $Z_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$ est une CMH. Quelle est sa matrice de transition en n étapes ? Montrez qu'elle est irréductible si $\mathbf{P}$ est

irréductible et apériodique. Donnez un contre-exemple lorsqu'on abandonne l'hypothèse d'apériodicité.

Exercice 8.5.17.
Soit $X_0^1, X_0^2, Z_n^1, Z_n^2$ ($n \geq 1$) des variables aléatoires indépendantes, et telles que, de plus, Z_n^1, Z_n^2 ($n \geq 1$) sont identiquement distribuées. Soit τ une variable aléatoire à valeurs entières non négatives telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'événement $\{\tau = m\}$ est exprimable en fonction de $X_0^1, X_0^2, Z_n^1, Z_n^2$ ($n \leq m$). On définit $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ par

$$Z_n = \begin{cases} = Z_n^1 & \text{si } n \leq \tau \\ = Z_n^2 & \text{si } n > \tau \end{cases}$$

Montrez que $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ a la même distribution que $\{Z_n^1\}_{n\geq 1}$ et est indépendante de X_0^1, X_0^2.

Exercice 8.5.18. Fusion.
Soit $\{X_n^1\}_{n\geq 0}$ et $\{X_n^2\}_{n\geq 0}$ deux cmh avec la même matrice de transition $\mathbf{P}$. Soit τ le temps défini par

$$\tau = \inf\{n \geq 0\,;\, X_n^1 = X_n^2\}$$

(avec la convention usuelle: $\inf \varnothing = \infty$). Supposons que $P(\tau < \infty) = 1$. On définit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ par

$$X_n = \begin{cases} X_n^1 & \text{if } n \leq \tau \\ X_n^2 & \text{if } n > \tau \end{cases}$$

Montrez que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ a la même distribution que $\{X_n^1\}_{n\geq 1}$.

Exercice 8.5.19. La chaîne serpent.
Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une cmh d'espace d'état E et de matrice de transition $\mathbf{P}$. Pour $L \geq 1$, on définit $Y_n = (X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+L})$.

(a) Le processus $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ prend ses valeurs dans $F = E^{L+1}$. Montrez que c'est une cmh et donnez sa matrice de transition.

(b) Montrez que si $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est irréductible, il en est de même pour $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ si on restreint l'espace d'état de cette dernière à $F = \{(i_0, \ldots, i_L) \in E^{L+1}\,;\, p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{L-1} i_L} > 0\}$.

(c) Montrez que si $\{X_n\}_{n\geq 0}$ a une distribution stationnaire π, alors $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ a aussi une distribution stationnaire. Laquelle ?

Exercice 8.5.20. $*$ Retour à l'état initial.
Soit τ le temps de retour à l'état initial d'une cmh irréductible récurrente positive $\{X_n\}_{n\geq 0}$, c'est-à-dire,

$$\tau = \inf\{n \geq 1; X_n = X_0\},$$

Calculez l'espérance de τ lorsque la distribution initiale est la distribution stationnaire π. Conclure que cette espérance est finie si et seulement si E est fini. Quand E est infini, est-ce que ceci est en contradiction avec l'hypothèse de récurrence positive ?

Exercice 8.5.21. $*$ LE CAVALIER RENTRE À LA MAISON.
Un cavalier circule de manière aléatoire sur un échiquier, choisissant chaque mouvement parmi ceux qui lui sont permis avec la même probabilité, et débutant son périple d'un coin de l'échiquier. Combien de temps en moyenne lui faudra-t-il pour se retrouver sur sa case de départ ?

Exercice 8.5.22. CODAGE ALTERNATIF.
Dans certains systèmes de communication numérique, une suite de 0 et de 1 (symboles d'entrée) est codée en une suite de 0, $+1$ et -1 (symboles de sortie) de la manière suivante. Un symbole d'entrée 0 est codé en 0, tandis qu'un symbole d'entrée 1 est codé en -1 ou $+1$. Le choix entre -1 et $+1$ est fait de telle sorte que les -1 et les $+1$ alternent. Le premier 1 est codé en $+1$. Par exemple la suite de symboles d'entrée 011101 devient $0, +1, -1, +1, 0, -1$.

a. Trouvez un automate avec 4 états $+1$, -1, 0_+ et 0_-, pour lequel la suite des états visités, à part l'état initial fixé à 0_+, est, lorsque 0_+ et 0_- sont remplacés par 0, exactement la suite de sortie.

b. On suppose que la suite d'entrée $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ est IID, avec 0 et 1 équiprobables. La suite des états de l'automate est alors une CMH dont on demande de calculer la matrice de transition $\mathbf{P}$ et ses itérées $\mathbf{P}^n$, et la distribution stationnaire π.

c. Notons $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ la suite de symboles de sortie (prenant les valeurs $\{0, -1, +1\}$). Montrez que $Y_n = f(X_n)$ pour une function f à identifier, et calculez $\lim_{n\to\infty}\{E[Y_nY_{n+k}] - E[Y_n]E[Y_{n+k}]\}$ pour tout $k \geq 0$.

Exercice 8.5.23. $*$ ABBABAA.
Une suite de A et de B est formée comme suit. La première lettre est choisie au hasard, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, ainsi que la deuxième, indépendamment de la première. Quand les $n \geq 2$ premières lettres ont été sélectionnées, la $(n+1)$-ème est choisie, indépendamment des lettres dans les positions $k \leq n-2$, et conditionnellement à la paire formée par les lettres en position $n-1$ et n, comme suit :

$$P(A \mid AA) = \frac{1}{2}, P(A \mid AB) = \frac{1}{2}, P(A \mid BA) = \frac{1}{4}, P(A \mid BB) = \frac{1}{4}.$$

Quelles sont les proportions de A et de B au long terme ?

Exercice 8.5.24. RECHERCHE D'UN MOTIF.
Considérons le tableau de a et de b de la figure A ci-dessous où une lettre dans une position donnée est choisie au hasard et équiprobablement dans l'ensemble $\{a, b\}$,

indépendamment des autres lettres. On veut calculer la fréquence empirique asymptotique du motif de la figure B, sans compter les chevauchements. Par exemple, avec la suite de la figure A , on compte 2 occurences du motif ; La troisième est ignorée car elle chevauche la deuxième (Figure C).

$$\begin{array}{cccccccccc} b & a & b & b & a & b & a & b & b & b \\ b & a & a & a & b & b & a & a & a & a \end{array} \qquad \text{A}$$

$$\begin{array}{ccc} b & \cdot & b \\ \cdot & a & a \end{array} \qquad \text{B}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} b & a & b & b & a & b & a & b & b & b \\ b & a & a & a & b & b & a & a & a & a \\ & \text{OUI} & & & & & \text{OUI} & & \text{NON} & \end{array} \qquad \text{C}$$

Trouvez un automate qui lit successivement les colonnes à deux lettres de gauche à droite, et qui possède un état privilégié $*$ avec la propriété suivante : l'automate entre ou reste dans l'état $*$ si et seulement si il vient de découuvrir un motif qui ne chevauche pas un autre précédemment découvert. Quelle est la fréquence empirique asymptotique du motif ?