Examen à la maison du cours: Structures et Algorithmes Aléatoires

à rendre le 4 décembre 2009.

Temps conseillé: 2h.

1. Problème 1:

   (a) Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements avec $n \geq 2$. Montrer que:

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) &= \sum_i \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\quad - \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).\end{aligned}$$

   (b) Des portraits des 5 derniers directeurs(trices) de l'ENS sont placés dans des boîte de céréales. La probabilité que dans un paquet, on trouve un portrait donné est $1/5$ indépendamment des autres paquets. Montrer que la probabilité que chacun des 3 derniers directeurs(trices) soit obtenu dans un achat de 6 paquets est: $1 - 3(\frac{4}{5})^6 + 3(\frac{3}{5})^6 - (\frac{2}{5})^6$.

   (c) On revient au cadre de la première question. Soit N_k l'événement: exactement k des A_i se produisent. Montrer que:

   $$\mathbb{P}(N_k) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{k+i}{k} S_{k+i},$$

   avec $S_j = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_j} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j})$.

   (d) Trouver une expression pour la probabilité qu'en achetant 6 paquets de céréale, on obtienne exactement trois portaits distincts.

2. Problème 2: Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une liste de n nombres distincts. On dit que a_i et a_j sont inversés si $i < j$ et $a_i > a_j$. Le tri à bulles, est un algorithme de tri qui échange les pairs adjacentes de nombres qui sont inversés jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'inversion et donc que la liste soit triée. En supposant que la liste en entrée du tri à bulles est obtenue par une permutation aléatoire tirée uniformément parmi les $n!$ permutaions possibles, donner le nombre moyen d'échanges faits par le tri à bulles. Déterminer la variance du nombre d'échanges.

3. Problème 3: Chaque personne dans un groupe de n personnes choisit un partenaire au hasard. Calculer la probabilité:

   (a) que exactement k personnes ne soient choisi par personne.

   (b) qu'au moins k personnes ne soient choisi par personne.

4. Problème 4: 10 pour cent de la surface d'une sphère S est colorié en bleu, le reste en rouge. Montrer qu'il est toujours possible d'inscrire un cube dans S avec tous ses sommets rouges.

5. Problème 5: un échantillon d'ADN est retrouvé sur une scène de crime. Cet échantillon contient un gène qui n'est présent qu'avec probabilité 10^{-7} chez un individu et de manière indépendante dans la population. L'ADN en question est celui du criminel qui habite dans la ville ayant 10^7 habitants. Quel est le nombre moyen d'individus dans la ville ayant ce gène particulier?

(a) Etant donné que la police a trouvé un tel individu, quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins un autre?

(b) Si la police trouve deux individus avec ce gène, quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins un autre?

(c) Combien de tels individus doivent etre trouvés pour que la police estime raisonnable que le criminel est parmi ceux-ci?

6. Problème 6: Un ensemble stable dans un graphe G est un ensemble de sommets n'ayant pas d'arêtes entre eux. Montrer qu'un graphe à n sommets et m arêtes a un ensemble stable contenant au moins $n^2/4m$ sommets. Pour cela, on pourra considérer l'algorithme aléatoire suivant: (a) supprimer de G chaque sommet avec probabilité $1 - 1/d$ où $d = 2m/n$; (b) pour chaque arête restante, la retirer ainsi qu'un de ses sommets adjacents.

7. Problème 7: n paires d'usagers doivent communiquer en utilisant des chemins ne partageant pas d'arête sur un réseau fixé. Chaque paire $i = 1, 2, \ldots, n$ doit choisir un chemin parmi une famille F_i de m chemins. Montrer que si chaque chemin dans F_i partage des arêtes avec au plus k chemins de F_j pour $i \neq j$ et que $8nk/m \leq 1$ alors, il est possible de choisir n chemins connectant les n paires et qui ne partagent pas d'arêtes.