

Modèles et algorithmes des réseaux

20 octobre 2015

Exercice 1 Écroulement du débit

Dans cet exercice, on se propose de mettre en évidence un phénomène d'écroulement de débit.

On considère un réseau en forme de cycle, contenant N liens (l_0, \dots, l_{N-1}) et N flots (f_0, \dots, f_{N-1}) , où chaque f_i emprunte successivement les liens l_i et l_{i+1} (modulo N).

On note x_i le débit entrant de f_i , fixé par la source, et c_i la capacité de l_i . Si la capacité d'un lien est dépassée, le débit de chaque flot est alors réduit proportionnellement à sa valeur en entrée du lien.

1. Calculer le débit sortant pour chaque flot.
2. Supposons que les capacités de tous les liens et les débits entrants de tous les flots sont égaux, i.e. $c_i = c$ et $x_i = x$ pour tout i . Montrer que le débit total tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 Équité max-min

Montrer qu'il existe une unique allocation max-min équitable.

Exercice 3 Allocation utilitaire

Considérer la fonction d'utilité suivante :

$$U_\alpha(x) = \begin{cases} -x^\alpha, & \alpha < 0 \\ x^\alpha, & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que l'allocation qui maximise

$$\sum_{i=1}^N U_\alpha(x_i)$$

sous des contraintes de capacité

$$\sum_{i:l \in f_i} x_i \leq C_l, \forall l$$

tend vers l'allocation max-min équitable quand $\alpha \rightarrow -\infty$.

2. Considérer maintenant le cas $\alpha \rightarrow 0^+$. Est-ce qu'il y a une convergence ? Si oui, décrire la limite.