Algorithmique des Réseaux Sociaux

26 Novembre

Exercice 1 – Théorème d'Arrow

Nous allons montrer (avec les notations du cours) : avec au moins 3 candidats , il n'existe pas de règle de préférence satisfaisant (NRD), (P), (I) et (ND).

Dans toute la suite, nous considérons qu'il y a au moins 3 candidats et une règle de préférence satisfaisant (NRD), (P) et (I). Nous montrons tout d'abord le lemme suivant : si un candidat b est tel qu'il est classé par tous les votants, soit premier soit dernier alors il doit être soit premier soit dernier de la préférence collective.

1. Montrer que si $a > b$ et $b > c$ dans la préférence collective alors il en est de même en mettant c au dessus de a pour tous les votants.
2. Conclure concernant le lemme.

Soit b un candidat. Nous numérotons les votants de 1 à N. Considérons un profil où chaque votant place b en fin de classement, le reste des préférences étant arbitaire. Par (P), la préférence collective doit aussi mettre b en fin de classement. Nous modifions maintenant le profil en changeant la préférence de chacun des votants de 1 à N successivement en plaçant b en tête de classement.

3. Montrer qu'il existe un premier votant $n(b)$ tel que b devienne le premier de la préférence collective. Montrer que $n(b)$ ne dépend pas du reste des préférences des votants.

On note profil I, le profil des préférences juste avant que $n(b)$ ne bouge b et profil II celui juste après.

Soit maintenant a et c deux candidats distincts de b tels que $a >_{n(b)} c$. On construit le profil III où le votant $n(b)$ place a au-dessus de b.

4. Montrer que $a > b$ et $b > c$ dans la préférence collective correspondant au profil III.
5. En déduire que la préférence collective concernant ac doit toujours être celle de $n(b)$.
6. Conclure.

Exercice 2 – Théorie du choix social et analyse de Fourier

On note $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$ munis de la loi uniforme. Pour des fonctions réelles f, g définies sur Ω_n, on définit leur produit scalaire par :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \Omega_n} f(x)g(x) = \mathbb{E}[f(x)g(x)].$$

La norme de f est alors $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. L'expansion de Fourier-Walsh est donnée par

$$f = \sum_{S \subset [n]} \hat{f}(S)\chi_S,$$

avec $\chi_S(x) = \prod_{i \in S} x_i$.

1. Montrer que pour tout $x \in \Omega_n$, $\chi_S(x)\chi_T(x) = \chi_{S\triangle T}(x)$ et que

$$\mathbb{E}[\chi_S(x)] = \begin{cases} 1, & \text{si } S = \emptyset, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   En déduire que les 2^n fonctions χ_S forment une base orthonormée pour les fonctions de Ω_n à valeur dans $\mathbb{R}$
2. Montrer que $\langle f, g\rangle = \mathbb{E}[f(x)g(x)] = \sum \hat{f}(S)\hat{g}(S)$.
3. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction majorité de 3 variables.
4. Montrer que si $f(-x) = -f(x)$ alors $\hat{f}(S)$ est non nul uniquement pour $|S|$ impaire.

On définit le biais de la fonction $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ par

$$\mathbb{E}[f(x)] = \mathbb{P}(f(x) = 1) - \mathbb{P}(f(x) = -1)$$

5. Montrer que le biais de f est $\hat{f}(\emptyset)$.

Le poids de Fourier de f au niveau k est défini par :

$$W_k[f] = \sum_{S\subset[n]\ |S|=k} \hat{f}(S)^2.$$

On définit la fonction Dictateur par : $Dict_i(x) = x_i$ pour $i \in [n]$.

6. Montrer que si $f\{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ est telle que $W_1[f] = 1$ alors f est soit un Dictateur soit la négation d'un Dictateur.

Etant donné $\epsilon \in [0,1]$, on dit que les variables aléatoires $x, y \in \{-1,1\}^n$ sont $(1-2\epsilon)$-corrélées si x suit la loi uniforme et si y est obtenu à partir de x en changeant chaque composante avec probabilité ϵ de manière indépendante. On a donc $\mathbb{E}[x_i y_i] = 1 - 2\epsilon$. La stabilité au bruit de f à $1-2\epsilon$ est alors : $Stab_{1-2\epsilon}(f) = \mathbb{E}_{x,y\ (1-2\epsilon)\ \mathrm{cor}}[f(x)f(y)]$.

7. Montrer que

$$Stab_{1-2\epsilon}(f) = \sum_{k=0}^{n} (1-2\epsilon)^k W_k[f].$$

On modélise une élection de Condorcet avec 3 candidats de la façon suivante :

	1	2	...	n	société
A vs. B	$+1$	$+1$	...	$-1 =: x$	$f(x)$
B vs. C	-1	$+1$	...	$+1 =: y$	$f(y)$
C vs. A	$+1$	-1	...	$+1 =: z$	$f(z)$

8. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction de 3 variables NAE Not All Equal (à valeur dans $\{0,1\}$).
9. Montrer que

$$\mathbb{E}[NAE(f(x), f(y), f(z))] = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathbb{E}[f(x)f(y)].$$

10. Montrer que dans la formule précédente $\mathbb{E}[f(x)f(y)] = Stab_{-1/3}(f)$.
11. En déduire le théorème d'Arrow pour 3 candidats.