Modèles et algorithmes des réseaux
DM1

à rendre le 1 décembre 2015

Exercice 1 Enchère de positions (*10 points*)

On considère le modèle introduit en cours pour le problème d'assignation d'agents $a = 1,\dots,A$ à des emplacements $s = 1,\dots S$. On suppose les emplacements ordonnés selon leur 'click-through rate' (CTR) : $x_1 > x_2 > \cdots > x_S$. Chaque agent a une valeur v_a qui est le profit moyen par clic et $u_{as} = v_a x_s$ indique alors le profit moyen pour l'agent a s'il obtient l'emplacement s. On suppose également les agents ordonnés selon leur valeur, $v_1 > v_2 > \cdot > v_A$.

Les emplacements sont vendus grâce à une enchère. Chaque agent enchérit b_a et l'emplacement avec le meilleur CTR est alloué à l'agent ayant fait l'offre la plus haute, le second meilleur emplacement à l'agent avec la seconde meilleure offre, etc. À chaque clic, l'agent obtenant la position s devra payer un prix p_s égal à l'offre de l'agent ayant fait l'offre inférieure la plus proche. On note $a(s)$ l'indice de l'agent ayant fait la s-iéme meilleure offre. On a donc pour $s \leq S$, $p_s = b_{a(s+1)}$. On supposera que le nombre d'agents A est supérieur au nombre d'emplacements $S < A$ (de sorte que p_s est bien défini pour $s \leq S$). On utilisera la convention $x_s = 0$ et $p_s = 0$ pour $s > S$.

Au final, le profit de l'agent obtenant l'emplacement $s \leq S$ est : $(v_{a(s)} - p_s)x_s = (v_{a(s)} - b_{a(s+1)})x_s$. On modélise l'enchère de positions par un jeu à information complète. Chaque agent fait simultanément une offre b_a. Les offres sont ordonnées et les prix déterminés comme décrit ci-dessus. La stratégie d'un agent est donc un réel positif $b_a \geq 0$.

En cours nous avons vu qu'un équilibre de Nash pour ce jeu doit satisfaire :

$$\begin{aligned}
(v_{a(s)} - p_s)x_s &\geq (v_{a(s)} - p_t)x_t, \quad \text{pour } t > s\\
(v_{a(s)} - p_s)x_s &\geq (v_{a(s)} - p_{t-1})x_t, \quad \text{pour } t < s,
\end{aligned}$$

avec $p_t = b_{a(t+1)}$.

On définit un équilibre de Nash symétrique (ENS) par : pour tout t, s,

$$(v_{a(s)} - p_s)x_s \geq (v_{a(s)} - p_t)x_t, \text{ avec } p_t = b_{t+1}. \tag{1}$$

1. Montrer que pour un ENS, on a $v_{a(s)} \geq p_s$.
2. Montrer que pour un ENS, on a $v_{a(s-1)} \geq v_{a(s)}$ pour tout s. Donc en particulier $a(s) = s$.
3. Montrer que pour un ENS, on a $p_{s-1} \geq p_s$ pour tout $s \leq S$. Si $v_s > p_s$ alors $p_{s-1} > p_s$.
4. Montrer qu'un ENS est un équilibre de Nash.
5. Montrer que si un ensemble d'offres $(b_1, b_2, \dots, b_A)$ satisfait (1) pour $t = s+1, s-1$ uniquement alors toutes les inégalités sont satisfaites.
6. Montrer que $b_s^L \leq b_s \leq b_s^U$ avec

$$\begin{aligned}
b_s^U x_{s-1} &= \sum_{t \geq s} v_{t-1}(x_{t-1} - x_t),\\
b_s^L x_{s-1} &= \sum_{t \geq s} v_t(x_{t-1} - x_t).
\end{aligned}$$

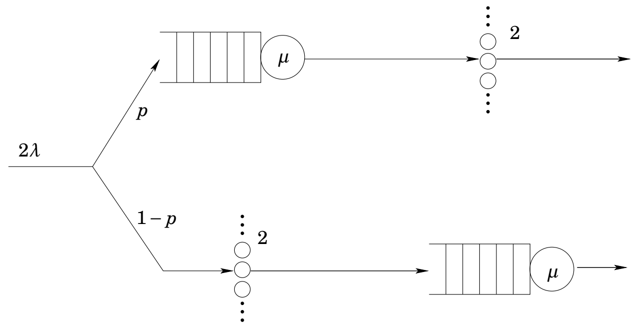

FIGURE 1 – Réseau avec deux routes.

En sommant ces équations, on obtient une borne inférieure R^L_{ENS} et une borne supérieure R^U_{ENS} sur le revenu de l'enchère (pour l'organisateur de l'enchère) :

$$\begin{aligned} R^U_{ENS} &= \sum_{s=1}^{S} s v_s (x_s - x_{s+1}), \\ R^L_{ENS} &= \sum_{s=1}^{S} s v_{s+1} (x_s - x_{s+1}). \end{aligned}$$

Cependant ces bornes ne sont valides que pour les ENS. Soit R^L_{EN} et R^U_{EN}, le revenu respectivement minimum et maximum sur tous les équilibres de Nash possibles.

7. Montrer que $R^U_{EN} \geq R^U_{ENS} \geq R^L_{ENS} \geq R^L_{EN}$.

On considère maintenant que le jeu n'est plus à information complète. Les valeurs v_a sont privées tandis que les CTR x_s sont publiques.

8. Pour cette question, on considère un cas particulier avec trois agents et deux emplacements ainsi que les valeurs suivantes : $v_1 = 10$, $v_2 = 4$, $v_3 = 2$ et $x_1 = 200$, $x_2 = 199$. Montrer qu'être honnête n'est pas une stratégie dominante.
9. On modifie le système d'enchère de la manière suivante : l'attribution des emplacements se fait comme précédemment mais le payement est modifié de la façon suivante :

$$p_{s-1} = \frac{1}{x_{s-1}} \sum_{t \geq s} b_{a(t)} (x_{t-1} - x_t)$$

   A quelle enchère correspond le cas $S = 1$? Pour tout S, montrer que la stratégie dominante est maintenant d'être honnête.
10. Montrer que le revenu de l'enchère non-manipulable est R^L_{ENS}.
11. Pour cette question, on considère un cas particulier avec trois agents et deux emplacements ainsi que les valeurs suivantes : $v_1 = 12$, $v_2 = 8$, $v_3 = 4$ et $x_1 = 400$, $x_2 = 200$. Calculer le revenu de l'enchère non-manipulable. Comparer au revenu de l'enchère décrite en début d'exercice lorsque les joueurs sont honnêtes. Est-ce un équilibre de Nash ?

Exercice 2 Paradoxe de Braess (*4 points*)

On suppose un réseau donné dans la figure 1. Il est composé de deux routes : la route en haut consiste d'une file M/M/1 avec le service de taux μ, suivie d'une file M/M/∞ de durée moyenne de service 2 ; celle en bas

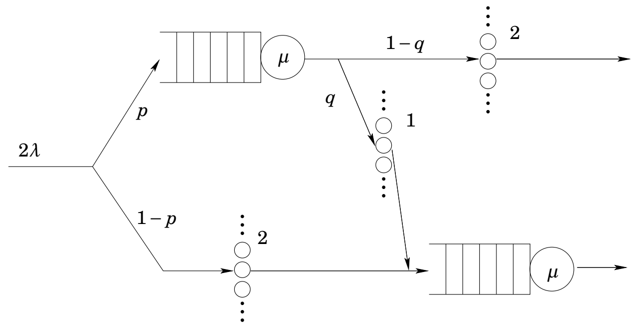

FIGURE 2 – Un lien supplementaire.

est composée de même type de files, mais dans l'ordre inverse. Les arrivées suivent un Processus de Poisson de paramètre 2λ et se dirigent vers la route en haut avec la probabilité p.

1. Donner la condition de stabilité de ce réseau. Sous cette condition de stabilité, quel est le temps moyen de séjour pour chaque route ?
2. Quelle est la valeur de p pour laquelle les temps moyen de séjour de deux routes sont égaux ?
   On suppose maintenant qu'on a un nouveau lien dans le réseau (figure 2) : les paquets qui suivent la route en haut peuvent maitnenant rejoindre la route en bas après le service dans la première file. Supposons que cela arrive avec la probabilité q.
3. Donner la condition de stabilité de ce nouveau réseau et le temps moyen de séjour pour chaque route.
4. On suppose maintenant que $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. Calculer les valeurs de p et q pour lesquelles les trois routes ont le même temps moyen de séjour.
5. Comparer les systèmes dans les questions 2 et 4 en fonction des valeurs des paramètres λ et μ.

Exercice 3 Spectral Partition algorithm (*8 points*)

L'objectif de cet exercice est d'implémenter Spectral Partition algorithm (dans langage de programmation de votre choix) et de vérifier l'implémentation sur des réseaux réels. Utiliser le format d'entrée de la base de données SNAP (https ://snap.stanford.edu/data/index.html). Les arêtes de réseaux sont données sous la forme "`node1 node2`", une par ligne. Par exemple, le graphe complet avec 4 nœuds est donné comme suit :

```
1 2
1 3
1 4
2 3
2 4
3 4
```

Vérifiez l'implémentation sur au moins un réseau de la base SNAP. Précisez quel réseau vous avez utilisé.