

# Théorie de l'information et du codage

TD n°6 – MESURES DE GIBBS

L'évolution d'un système isolé est régie par les deux grandes lois de la physique : son énergie est conservée, et son entropie augmente. Comme nous allons le voir, cela détermine entièrement la distribution des états du système à l'équilibre.

## 1 Cas discret

Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble fini d'états et  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\mathcal{X}$ . À chaque état  $x \in \mathcal{X}$  est associée une certaine énergie  $\mathcal{E}(x) \in \mathbb{R}$ . Étant donnée une distribution d'états  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ , on peut définir

1. son énergie :  $E(\mu) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \mu(x) \mathcal{E}(x)$ ;
2. son entropie :  $H(\mu) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \mu(x) \log \frac{1}{\mu(x)}$ .

Le but du jeu est de déterminer les distributions  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$  dont l'entropie est maximale parmi toutes celles qui ont une énergie  $E(\mu) = e$  donnée.

**Question 1.** *Peut-on obtenir n'importe quelle énergie moyenne  $e \in \mathbb{R}$  ? Déterminer l'ensemble  $J = \{\mathcal{E}(\mu); \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})\}$  des valeurs possibles.*

**Question 2.** *Quelle est la réponse au problème posé dans les deux cas extrêmes suivants :*

$$e = \min_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{E}(x) \quad \text{et} \quad e = \max_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{E}(x).$$

Pour traiter le cas général, on introduit la fonction suivante, appelée fonction de partition en physique, et transformée de Laplace en mathématiques :

$$Z: \beta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{x \in \mathcal{X}} e^{-\beta \mathcal{E}(x)}.$$

**Question 3.** *Montrer que la fonction  $\Lambda = \log Z$  est convexe. Quel est l'ensemble  $\Lambda'(\mathbb{R})$  des valeurs prises par sa dérivée ?*

**Question 4.** Établir que pour tout  $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$  et tout  $\beta \in \mathbb{R}$ ,

$$H(\mu) - \beta E(\mu) \leq \Lambda(\beta).$$

À quelle condition y a-t'il égalité ?

Pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ , on appelle mesure de Gibbs sous la température  $\beta$  la distribution  $\mu_\beta^* \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$  définie pour tout  $x \in \mathcal{X}$  par :

$$\mu_\beta^*(x) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta \mathcal{E}(x)}.$$

**Question 5.** Expliciter son entropie  $H(\mu_\beta^*)$  et son énergie moyenne  $E(\mu_\beta^*)$ , en fonction de la température  $\beta$ .

**Question 6.** Résoudre finalement le problème posé, pour tout énergie moyenne  $e \in J$ .

## 2 Cas continu

L'espace d'états est à présent  $\mathbb{R}$  tout entier. On considère une fonction mesurable  $\mathcal{E}$  sur  $\mathbb{R}$ , appelée énergie. Si  $f$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , son entropie  $H(f)$  et son énergie moyenne  $E(f)$  sont définies de la façon suivante (lorsque cela a du sens) :

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx \quad \text{et} \quad E(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{E}(x) dx.$$

Le but du jeu est de déterminer les densités de probabilités  $f$  dont l'entropie est maximale parmi toutes celles qui ont une énergie moyenne  $e \in \mathbb{R}$  donnée.

**Question 7.** En s'inspirant du cas discret, résoudre le problème posé.

**Question 8.** On pose  $\mathcal{E}(x) = x \mathbf{1}_{\{x > 0\}}$ . Expliciter l'ensemble des énergies possibles  $J$ , puis la densité dont l'entropie est maximale pour une énergie moyenne  $e \in J$  donnée. En déduire une caractérisation importante des lois exponentielles  $\text{Exp}(\mu)$ ,  $\mu > 0$ .

**Question 9.** Même question pour  $\mathcal{E}(x) = x^2$ . Quel résultat remarquable retrouve-t'on ?

## 3 Cas multi-dimensionnel

On se place finalement sur l'espace d'états  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ .

**Question 10.** Comment les résultats précédents se généralisent-ils ?

**Question 11.** Parmi tous les vecteurs aléatoires  $d$ -dimensionnels de moyenne  $\mu \in \mathbb{R}^d$  et de matrice de covariance  $K \in S^{++}(\mathbb{R}^d)$  données, quel est celui dont l'entropie est maximale ?