Exercices du cours de Théorie de l'Information et Codage
cours 1 du 9 février 2010.

1. Dans le cas $R = 1/2n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et pour un encodage du type: répétition de chaque bit $2n$ fois sur le canal BSC: donner une stratégie de décodage et calculer la probabilité d'erreur correspondante P_e. Comparer au cas $R = 1/(2n-1)$ étudié en cours quand $p \to 0$.

2. On considère le cas $R = 2n+1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et l'encodage: j'envoie la majorité de chacun des blocs de $2n+1$ bits successifs émis par la source (comme décrit en cours pour $R = 3$). Montrer que $P_e = (1-p)Q + p(1-Q)$ avec

$$Q = \frac{1}{2} - \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)}.$$

   Montrer que dans le cas $R = 2n$, une stratégie similaire donne exactement la même probabilité d'erreur P_e.

3. Vérifier les formules pour les probabilités d'erreur par bit données dans le cours pour le code de Hamming.

4. Etant donnés une probabilité $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ et un entier $m \leq n$, on définit $q_m = 1 - \sum_{j=1}^{m} p_j$. Montrer que $H(p_1, \dots, p_n) \leq H(p_1, \dots, p_m, q_m) + q_m \log(n-m)$. Cas d'égalité?

5. Soit $f(x)$ une fonction définie pour tout $x \geq 1$. Si X est une v.a. discrète à espace d'états $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, on définit la f-entropie de X par $H_f(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(1/p_i)$, où $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Si f est concave, trouver la meilleur borne supérieure pour $H_f(X)$ qui ne dépende que de n. Si $f(x) = \log(x)/x$, montrer que $H_f(X) < \log(e)/e$. Montrer qu'en fait, $H_f(X) \leq \log(3)/3$, avec égalité ssi exactement trois p_i sont égaux à $1/3$ et le reste à 0.

6. Montrer que l'inégalité de Fano donne une borne supérieure et une borne inférieure pour P_e en fonction de $H(X|Y)$. Donner une interprétation heuristique pour la borne supérieure.