Examen à la maison du cours de Théorie de l'Information et Codage

à rendre le 16 mars 2009.

Temps conseillé: 3h.

1. Problème 1: Quels codes ne peuvent pas être des codes de Huffman?
   (a) $\{1, 01, 00\}$
   (b) $\{00, 01, 10, 110\}$
   (c) $\{01, 10\}$

2. Problème 2: On suppose qu'une source discrète sans mémoire a pour alphabet $\mathcal{X}$ et que sa distribution est l'une des distributions $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... ou $p_K(x)$ (mais nous ne savons pas laquelle). Soit $H_k = -\sum_x p_k(x) \log_2 p_k(x)$ l'entropie de la distribution p_k pour $k = 1, \ldots K$. On définit $\hat{p}(x) = \max_{1 \leq k \leq K} p_k(x)$ et $A = \sum_x \hat{p}(x)$.
   (a) Montrer que $1 \leq A \leq K$.
   (b) Montrer qu'il existe un code instantané pour cette source avec des longueurs des mots code $\ell(x) = \lceil -\log_2 \hat{p}(x) + \log_2 A \rceil$.
   (c) Montrer que pour un tel code, $L_k = \sum_x p_k(x)\ell(x)$ satisfait:
   $$H_k \leq L_k < H_k + \log_2 A + 1.$$

3. Problème 3:
   (a) Une source a un alphabet de 4 lettres a_1, a_2, a_3, a_4 avec des probabilités $p(a_1) > p(a_2) = p(a_3) = p(a_4)$. Trouver le plus petit q tel que $p(a_1) > q$ implique que $n_1 = 1$ où n_1 est la longueur du mot code correspondant à a_1 dans le code de Huffman binaire.
   (b) Montrer que si $p(a_1) = q$, il est possible de trouver un code de Huffman avec $n_1 > 1$.
   (c) On suppose maintenant que la source a un alphabet de K lettres et $p(a_1) > p(a_2) \geq \cdots \geq p(a_K)$. Est-ce que $p(a_1) > q$ implique encore $n_1 = 1$?
   (d) Si maintenant $p(a_1) \geq p(a_2) \geq \cdots \geq p(a_K)$, trouver le plus grand q' tel que $p(a_1) < q'$ implique $n_1 > 1$.

4. Problème 4: Dans un casino, un jeu consiste à parier sur un tirage aléatoire d'une variable X à valeur dans $\{1, \ldots, K\}$. La distribution de X est $p(x)$. Si $X = k$, le casino multiplie la somme pariée sur k par $1/p(k)$, toutes les autres mises sont perdues. Une stratégie q d'un joueur est de mettre de coté (c'est à dire de ne pas jouer) une fraction $q(0)$ de son capital et pour le reste de miser une fraction $q(k)$ de son capital sur la valeur k. Donc $q(k) \geq 0$ pour tout k et $\sum_{k=0}^{K} q(k) = 1$.
   (a) On considère une stratégie q avec $q(0) > 0$. Montrer qu'il existe une stratégie $\hat{q}$ avec $\hat{q}(0) = 0$ qui est aussi performante que q, dans le sens où le joueur aura la même somme d'argent quelle que soit la valeur prise par X pour les deux stratégies.

On suppose pour la suite que $q(0) = 0$. On définit

$$R_n = \frac{1}{n} \log \frac{C_n}{C_0}$$

le 'taux de retour' du joueur où C_0 est le capital initial et C_n est le capital après n tours dans le jeu.

(b) En utilisant la loi des grands nombres, calculer

$$r = \lim_{n \to \infty} R_n$$

en fonction de p et q.

(c) On suppose maintenant que avant chaque tour i, le joueur a une information donnée par Y_i qui est corrélée à X. La distribution de (X_i, Y_i) est $p(x, y)$. La stratégie du joueur au tour i, étant donné l'information $Y_i = y$ est de parier une fraction notée $q(k|y)$ de son capital sur la valeur k. Recalculer $r = \lim_{n \to \infty} R_n$.

(d) Trouver la stratégie $q(x|y)$ qui maximise r et comparer cette valeur maximale à $I(X; Y)$.

5. Problème 5: une variable aléatoire prend ses valeurs dans un alphabet de K lettres et chaque lettre a la même probabilité. Ces lettres sont encodées dans des mots binaires de façon à minimiser la longueur moyenne des mots code. On définit l'entier j et $1 \leq x < 2$ par $K = x2^j$.

   (a) Montrer que tous les mots code ont pour longueur j ou $j + 1$.

   (b) Quelle est la longueur moyenne d'un mot code?

6. Problème 6: en utilisant le code de Hamming $(7, 4)$ vu en cours, résoudre le problème suivant:

   (a) Il y a 7 prisonniers dans une salle. Chacun a un chapeau bleu ou rouge avec probabilité $1/2$ indépendamment des autres. Chaque prisonnier connaît la couleur des chapeaux des autres prisoniers mais aucun prisonnier ne connaît la couleur de son propre chapeau. Le gardien de prison demande aux prisoniers de deviner la couleur de leur chapeau: si un prisonnier se trompe, tous les prisonniers sont tués. Un prisonnier a la possibilité de ne rien dire (au lieu de deviner) mais si aucun prisonnier ne parle, ils sont également tous tués. Quelle est la stratégie optimale que les prisonniers doivent suivre pour maximiser leur chance de survie? Aucune communication n'est permise entre les prisonniers sauf pour fixer la stratégie avant de rentrer dans la salle et le gardien de prison interroge chaque prisonnier séparemment.