Examen à la maison du cours de Théorie de l'Information et Codage

à rendre le 24 mars 2009.

Temps conseillé: 3h.

1. Problème 1:

   (a) Une source a un alphabet de 4 lettres a_1, a_2, a_3, a_4 avec des probabilités $p(a_1) > p(a_2) = p(a_3) = p(a_4)$. Trouver le plus petit q tel que $p(a_1) > q$ implique que $n_1 = 1$ où n_1 est la longueur du mot code correspondant à a_1 dans le code de Huffman binaire.

   (b) Montrer que si $p(a_1) = q$, il est possible de trouver un code de Huffman avec $n_1 > 1$.

   (c) On suppose maintenant que la source a un alphabet de K lettres et $p(a_1) > p(a_2) \geq \cdots \geq p(a_K)$. Est-ce que $p(a_1) > q$ implique encore $n_1 = 1$?

   (d) Si maintenant $p(a_1) \geq p(a_2) \geq \cdots \geq p(a_K)$, trouver le plus grand q' tel que $p(a_1) < q'$ implique $n_1 > 1$.

2. Problème 2: on considère le jeu suivant: à l'étape n, le joueur dispose d'un montant S_n. Le casino tire à pile ou face avec probabilité 1/2. Si le résultat est pile, le casino double la mise du joueur: $S_{n+1} = 2S_n$, sinon le joueur perd les 2/3 de sa mise: $S_{n+1} = S_n/3$. Le jeu commence avec $S_1 = 1$.

   (a) Calculer $\lim_{n\to\infty} S_n^{1/n}$.

   (b) Est-il vrai que $\mathbb{E}[\lim_n S_n] = \lim_n \mathbb{E}[S_n]$?

3. Problème 3: une variable aléatoire prend ses valeurs dans un alphabet de K lettres et chaque lettre a la même probabilité. Ces lettres sont encodées dans des mots binaires de façon à minimiser la longueur moyenne des mots code. On définit l'entier j et $1 \leq x < 2$ par $K = x2^j$.

   (a) Montrer que tous les mots code ont pour longueur j ou $j + 1$.

   (b) Quelle est la longueur moyenne d'un mot code?

4. Problème 4: La course de chevaux. Trois chevaux participent à la course. Si vous pariez 1 euro avant la course, vous en recevez 3 si votre cheval gagne (gain net de 2) et rien s'il n'est pas gagnant (perte de 1). Les probabilités de gagner sont $(p_1, p_2, p_3) = (1/2, 1/4, 1/4)$. Vous distribuez la totalité de votre mise sur les chevaux. Soit b_i la fraction correspondant au cheval i. On note $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $b_i \geq 0$ et $\sum b_i = 1$. Si le cheval i gagne la course, vous gagnez donc $3b_i$, les autres paris étant perdus. Il y a une infinité de courses (!) dont les résultats sont indépendants les uns des autres et à chaque course, vous misez l'intégralité de votre mise.

   (a) Montrer que si à chaque course, vous jouez toujours le cheval 1 (celui qui a le plus de chance de gagner), vous allez perdre votre mise initiale avec probabilité 1 au bout d'un temps fini.

   (b) On définit

   $$W(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3} p_i \log 3b_i.$$

   Maximiser W et en déduire une stratégie (fixe dans le temps) qui permet de gagner de l'argent.

5. Problème 5: on considère une source avec un alphabet $A_U = \{-1, 0, +1\}$ et un alphabet de destination $A_V = \{-1/2, +1/2\}$. La statistique de la source est $(1/3, 1/3, 1/3)$ et la matrice de distorsion

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer la fonction taux-distorsion.

6. Problème 6: en utilisant le code de Hamming $(7, 4)$ vu en cours, résoudre le problème suivant:

   (a) Il y a 7 prisonniers dans une salle. Chacun a un chapeau bleu ou rouge avec probabilité 1/2 indépendamment des autres. Chaque prisonnier connaît la couleur des chapeaux des autres prisoniers mais aucun prisonnier ne connaît la couleur de son propre chapeau. Le gardien de prison demande aux prisoniers de deviner la couleur de leur chapeau: si un prisonnier se trompe, tous les prisonniers sont tués. Un prisonnier a la possibilité de ne rien dire (au lieu de deviner) mais si aucun prisonnier ne parle, ils sont également tous tués. Quelle est la stratégie optimale que les prisonniers doivent suivre pour maximiser leur chance de survie? Aucune communication n'est permise entre les prisonniers sauf pour fixer la stratégie avant de rentrer dans la salle et le gardien de prison interroge chaque prisonnier séparemment.