Algorithms for Networked Information
DM1

à rendre le 12 novembre 2014

Chacun des 2 exercices vaut 12 points. Il y a donc la possibilité d'accumuler 4 points de bonus avec ce DM.

Exercice 1 PageRank et temps de mélange (*12 points*)

On définit la distance en variation totale entre deux mesures de probabilité μ et ν sur Ω par :

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} = \max_{A \subset \Omega} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

1. Montrer que

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |\mu(x) - \nu(x)| = \sum_{\mu(x) \geq \nu(x)} \big(\mu(x) - \nu(x)\big).$$

2. Montrer que pour $B = \{x, \mu(x) \geq \nu(x)\}$ et tout $A \subset \Omega$, on a :

$$\mu(A) - \nu(A) \leq \mu(B) - \nu(B)$$

3. En déduire que

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |\mu(x) - \nu(x)|.$$

Un couplage entre deux mesures de probabilité μ et ν est une paire de variables aléatoires (X, Y) définies sur un même espace de probabilité telle que la distribution marginale de X est μ, i.e. $\mathbb{P}(X = x) = \mu(x)$ et la marginale de Y est ν, i.e. $\mathbb{P}(Y = y) = \nu(y)$.

4. Montrer que

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} \leq \inf\{\mathbb{P}(X \neq Y) : (X, Y) \text{ est un couplage de } \mu \text{ et } \nu.\}$$

5. Montrer que

$$\sum_{x \in \Omega} \mu(x) \wedge \nu(x) = 1 - \|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} \in [0, 1].$$

6. En déduire un couplage (X, Y) tel que $\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} = \mathbb{P}(X \neq Y)$.

Une chaîne de Markov à espace d'états Ω et de matrice de transition P est une suite de variables aléatoires $(X_0, X_1, \dots)$ telles que

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x) = P(x,y).$$

Une chaîne est dite irréductible si pour tous $x, y \in \Omega$, il existe t tel que $P^t(x,y) > 0$. Soit $T(x) = \{t \geq 1, P^t(x,x) > 0\}$. La période de x est le pgcd de $T(x)$. Une chaîne est dite apériodique si tous les états ont pour période 1.

7. Montrer que si P est irréductible alors tous les états ont même période.
8. Montrer que si P est irréductible apériodique si et seulement s'il existe un entier positif t tel que P^t est strictement positif.
9. Montrer que dans ce cas, il existe une unique distribution stationnaire sur Ω, satisfaisant $\pi = \pi P$.

On note $P^t(x, \cdot)$ pour la loi de la chaîne de Markov au temps t commencée en $X_0 = x \in \Omega$ et μP^t pour le cas où la loi de X_0 est μ. On définit

$$\begin{aligned} d(t) &= \max_{x \in \Omega} \|P^t(x,\cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}}, \\ \overline{d}(t) &= \max_{x,y \in \Omega} \|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\|_{\mathrm{TV}}. \end{aligned}$$

10. Montrer que

$$d(t) \leq \overline{d}(t) \leq 2d(t).$$

11. Montrer que

$$\begin{aligned} d(t) &= \sup_{\mu} \|\mu P^t - \pi\|_{\mathrm{TV}}, \\ \overline{d}(t) &= \sup_{\mu,\nu} \|\mu P^t - \nu P^t\|_{\mathrm{TV}}, \end{aligned}$$

où μ et ν sont des distributions sur Ω.

12. Montrer que

$$\|\mu P - \nu P\|_{\mathrm{TV}} \leq \|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}}.$$

En déduire que $d(t)$ et $\overline{d}(t)$ sont décroissantes en t.

13. Pour un couplage (X_s, Y_s) de $P^s(x,\cdot)$ et de $P^s(y,\cdot)$, montrer que

$$\|P^{t+s}(x,\cdot) - P^{t+s}(y,\cdot)\|_{\mathrm{TV}} = \frac{1}{2} \sum_{w} \left| \mathbb{E}\left[P^t(X_s, w) - P^t(Y_s, w)\right] \right|.$$

14. En déduire que $\bar(d)$ est sous-multiplicative : $\overline{d}(t+s) \leq \overline{d}(t)\overline{d}(s)$.

On définit le temps de mélange par

$$t_{\mathrm{mix}}(\epsilon) = \min\{t, \, d(t) \leq \epsilon\} \text{ et, } t_{\mathrm{mix}} = t_{\mathrm{mix}}(1/4).$$

15. Montrer que $d(k t_{\mathrm{mix}}) \leq 2^{-k}$ et $t_{\mathrm{mix}}(\epsilon) \leq \lceil \log_2 \epsilon^{-1} \rceil t_{\mathrm{mix}}$.

On définit un couplage de chaînes de Markov avec matrice de transition P comme le processus $(X_t, Y_t)_{t=0}^{\infty}$ ayant la propriété que chacun des processus (X_t) et (Y_t) est une chaîne de Markov de matrice de transition P (ces processus peuvent avoir des points de départs différents). Tout couplage peut être modifié de telle sorte que : si $X_s = Y_s$ alors $X_t = Y_t$ pour tout $t \geq s$. On définit alors le temps de couplage par

$$\tau_{\mathrm{couple}} = \min\{t, \, X_t = Y_t\}.$$

16. Comme exemple, considérer la marche aléatoire sur $\{0,1,\dots,n\}$ qui monte ou descend avec probabilité 1/2 et qui aux bords, reste immobile avec probabilité 1/2. En construisant un couplage, montrer que $P^t(x,n) \le P^t(y,n)$ dès que $x \le y$.
17. Montrer que
$$\|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\|_{\mathrm{TV}} \le \mathbb{P}_{x,y}\left(\tau_{\mathrm{couple}} > t\right).$$
18. Considérer la chaîne de Markov associée au calcul de PageRank (qui choisit avec probabilité $1-\alpha$ un sommet uniformément au hasard à chaque étape). Montrer que son temps de mélange satisfait $t_{\mathrm{mix}} \le \frac{4}{1-\alpha}$. Qu'en déduire sur la vitesse de convergence de l'algorithme ?

Exercice 2 Enchère de positions (*12 points*)

On considère le modèle introduit en cours pour le problème d'assignation d'agents $a = 1,\dots,A$ à des emplacements $s = 1,\dots S$. On suppose les emplacements ordonnés selon leur 'click-through rate' (CTR) : $x_1 > x_2 > \cdots > x_S$. Chaque agent a une valeur v_a qui est le profit moyen par clic et $u_{as} = v_a x_s$ indique alors le profit moyen pour l'agent a s'il obtient l'emplacement s. On suppose également les agents ordonnés selon leur valeur, $v_1 > v_2 > \cdot > v_A$.

Les emplacements sont vendus grâce à une enchère. Chaque agent enchérit b_a et l'emplacement avec le meilleur CTR est alloué à l'agent ayant fait l'offre la plus haute, le second meilleur emplacement à l'agent avec la seconde meilleure offre, etc. À chaque clic, l'agent obtenant la position s devra payer un prix p_s égal à l'offre de l'agent ayant fait l'offre inférieure la plus proche. On note $a(s)$ l'indice de l'agent ayant fait la s-iéme meilleure offre. On a donc pour $s \le S$, $p_s = b_{a(s+1)}$. On supposera que le nombre d'agents A est supérieur au nombre d'emplacements $S < A$ (de sorte que p_s est bien défini pour $s \le S$). On utilisera la convention $x_s = 0$ et $p_s = 0$ pour $s > S$.

Au final, le profit de l'agent obtenant l'emplacement $s \le S$ est : $(v_{a(s)} - p_s)x_s = (v_{a(s)} - b_{a(s+1)})x_s$. On modélise l'enchère de positions par un jeu à information complète. Chaque agent fait simultanément une offre b_a. Les offres sont ordonnées et les prix déterminés comme décrit ci-dessus. La stratégie d'un agent est donc un réel positif $b_a \ge 0$.

1. Montrer qu'un équilibre de Nash pour ce jeu doit satisfaire :
$$\begin{aligned}(v_{a(s)} - p_s)x_s &\ge (v_{a(s)} - p_t)x_t, \quad \text{pour } t > s\\ (v_{a(s)} - p_s)x_s &\ge (v_{a(s)} - p_{t-1})x_t, \quad \text{pour } t < s,\end{aligned}$$
avec $p_t = b_{a(t+1)}$.

On définit un équilibre de Nash symétrique (ENS) par : pour tout t, s,
$$(v_{a(s)} - p_s)x_s \ge (v_{a(s)} - p_t)x_t, \text{ avec } p_t = b_{t+1}. \tag{1}$$

2. Montrer que pour un ENS, on a $v_{a(s)} \ge p_s$.
3. Montrer que pour un ENS, on a $v_{a(s-1)} \ge v_{a(s)}$ pour tout s. Donc en particulier $a(s) = s$.
4. Montrer que pour un ENS, on a $p_{s-1} \ge p_s$ pour tout $s \le S$. Si $v_s > p_s$ alors $p_{s-1} > p_s$.
5. Montrer qu'un ENS est un équilibre de Nash.
6. Montrer que si un ensemble d'offres $(b_1, b_2, \dots, b_A)$ satisfait (1) pour $t = s+1, s-1$ uniquement alors toutes les inégalités sont satisfaites.
7. Montrer que $b_s^L \le b_s \le b_s^U$ avec
$$\begin{aligned} b_s^U x_{s-1} &= \sum_{t \ge s} v_{t-1}(x_{t-1} - x_t),\\ b_s^L x_{s-1} &= \sum_{t \ge s} v_t(x_{t-1} - x_t).\end{aligned}$$

En sommant ces équations, on obtient une borne inférieure R^L_{ENS} et une borne supérieure R^U_{ENS} sur le revenu de l'enchère (pour Google) :

$$\begin{aligned} R^U_{ENS} &= \sum_{s=1}^{S} s v_s (x_s - x_{s+1}), \\ R^L_{ENS} &= \sum_{s=1}^{S} s v_{s+1} (x_s - x_{s+1}). \end{aligned}$$

Cependant ces bornes ne sont valides que pour les ENS. Soit R^L_{EN} et R^U_{EN}, le revenu respectivement minimum et maximum sur tous les équilibres de Nash possibles.

8. Montrer que $R^U_{EN} = R^U_{ENS} \geq R^L_{ENS} \geq R^L_{EN}$.

On considère maintenant que le jeu n'est plus à information complète. Les valeurs v_a sont privées tandis que les CTR x_s sont publiques.

9. Pour cette question, on considère un cas particulier avec trois agents et deux emplacements ainsi que les valeurs suivantes : $v_1 = 10$, $v_2 = 4$, $v_3 = 2$ et $x_1 = 200$, $x_2 = 199$. Montrer qu'être honnête n'est pas une stratégie dominante.
10. On modifie le système d'enchère de la manière suivante : l'attribution des emplacements se fait comme précédemment mais le payement est modifié de la façon suivante :

$$p_{s-1} = \sum_{t \geq s} b_{a(t)} (x_{t-1} - x_t)$$

    A quelle enchère correspond le cas $S = 1$? Pour tout S, montrer que la stratégie dominante est maintenant d'être honnête.
11. Montrer que le revenu de l'enchère non-manipulable est R^L_{ENS}.
12. Pour cette question, on considère un cas particulier avec trois agents et deux emplacements ainsi que les valeurs suivantes : $v_1 = 12$, $v_2 = 8$, $v_3 = 4$ et $x_1 = 400$, $x_2 = 200$. Calculer le revenu de l'enchère non-manipulable. Comparer au revenu de l'enchère décrite en début d'exercice lorsque les joueurs sont honnêtes. Est-ce un équilibre de Nash ?