Algorithms for Networked Information
TD4

12 novembre 2014

Exercice 1 Méthode de Borda

On considère trois votants et quatre candidats avec la méthode de Borda.

1. Supposons que les deux premiers votants ont les préférences respectives $D > C > A > B$ et $D > B > A > C$. En tant que troisième votant, pouvons-nous construire une préférence telle que candidat A est voté premier par le groupe ?
2. La réponse change-t-elle si les préférences des premiers deux votants sont $D > A > C > B$ et $B > D > A > C$?

Exercice 2 Théorème d'Arrow

Nous allons montrer (avec les notations du cours) : avec au moins 3 candidats , il n'existe pas de règle de préférence satisfaisant (NRD), (P), (I) et (ND).

Dans toute la suite, nous considérons qu'il y a au moins 3 candidats et une règle de préférence satisfaisant (NRD), (P) et (I). Nous montrons tout d'abord le lemme suivant : si un candidat b est tel qu'il est classé par tous les votants, soit premier soit dernier alors il doit être soit premier soit dernier de la préférence collective.

1. Montrer que si $a > b$ et $b > c$ dans la préférence collective alors il en est de même en mettant c au dessus de a pour tous les votants.
2. Conclure concernant le lemme.

Soit b un candidat. Nous numérotons les votants de 1 à N. Considérons un profil où chaque votant place b en fin de classement, le reste des préférences étant arbitaire. Par (P), la préférence collective doit aussi mettre b en fin de classement. Nous modifions maintenant le profil en changeant la préférence de chacun des votants de 1 à N successivement en plaçant b en tête de classement.

3. Montrer qu'il existe un premier votant $n(b)$ tel que b devienne le premier de la préférence collective. Montrer que $n(b)$ ne dépend pas du reste des préférences des votants.

On note profil I, le profil des préférences juste avant que $n(b)$ ne bouge b et profil II celui juste après.

Soit maintenant a et c deux candidats distincts de b tels que $a >_{n(b)} c$. On construit le profil III où le votant $n(b)$ place a au-dessus de b.

4. Montrer que $a > b$ et $b > c$ dans la préférence collective correspondant au profil III.
5. En déduire que la préférence collective concernant ac doit toujours être celle de $n(b)$.
6. Conclure.

Exercice 3 Théorème de jurys de Concordet

On suppose qu'on a un jury de n personnes dont chacune vote choix A indépendamment avec une certaine probabilité. On veut connaître la probabilité qu'une majorité vote choix A.

1. Si la probabilité de voter A est $p > 1/2$ pour chaque membre du jury, montrer que la probabilité qu'une majorité vote choix A tend vers 1 quand $n \to \infty$.

2. Le résultat reste-t-il vrai si la probabilité est $p_n = 1/2 + n^{-1/3}$?
3. Si $p_n = 1/2 + 2^{-n}$?