

# Algorithms for Networked Information

## TD3

5 novembre 2014

### Exercice 1 Algorithme de Goldberg-Tarjan pour les flots maximaux

Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté. On note  $n = |V|$  et  $m = |E|$ . Pour chaque arête  $(v, w) \in E$ , on définit une capacité  $c(v, w) > 0$  et par convention, on prend  $c(v, w) = 0$  si  $(v, w) \notin E$ . Étant donné une source  $s$  et un puit  $t$  dans  $V$ , un flot dans  $G$  est une fonction  $f$  des paires de sommets à valeur dans  $\mathbb{R}$  telle que

- (i) capacité :  $f(v, w) \leq c(v, w)$  pour tout  $(v, w) \in V \times V$ ,
- (ii) antisymétrie :  $f(v, w) = -f(w, v)$  pour tout  $(v, w) \in V \times V$ ,
- (iii) conservation :  $\sum_{u \in V} f(u, v) = 0$  pour tout  $v \in V \setminus \{s, t\}$ .

La valeur du flot  $f$  est  $\sum_{v \in V} f(v, t)$  et un flot maximal est un flot de valeur maximale.

Une coupe  $(X, \bar{X})$  est une partition de l'ensemble des sommets ( $X \cup \bar{X} = V$  et  $X \cap \bar{X} = \emptyset$ ) telle que  $s \in X$  et  $t \in \bar{X}$ . La capacité de la coupe est  $c(X, \bar{X}) = \sum_{v \in X, w \in \bar{X}} c(v, w)$ . Si  $f$  est un flot, le flot au travers de la coupe est  $f(X, \bar{X}) = \sum_{v \in X, w \in \bar{X}} f(v, w)$ . Le principe de conservation implique que cette valeur est égale à la valeur du flot. De plus la contrainte de capacité implique que  $f(X, \bar{X}) \leq c(X, \bar{X})$ . Donc la valeur d'un flot maximal est inférieure ou égale à la capacité d'une coupe minimale. Le théorème de Ford et Fulkerson montre que ces deux quantités sont égales.

Nous allons définir un algorithme calculant une coupe minimale et un flot maximal. Pour cela, nous introduisons la notion de préflot  $f$  : une fonction des paires de sommets à valeur dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant (i) et (ii) mais une forme affaiblie de (iii) :

- (iii')  $\sum_{u \in V} f(u, v) \geq 0$  pour tout  $v \in V \setminus \{s\}$ .

Le flot en excès au sommet  $v \neq s$  est alors  $e(v) = \sum_{u \in V} f(u, v) \geq 0$ . Un préflot tel que  $e(v) = 0$  pour tout  $v \in V - \{s, t\}$  est un flot.

Pour un préflot  $f$ , nous définissons la capacité résiduelle de  $(v, w)$  notée  $r_f(v, w) = c(v, w) - f(v, w)$ . Si  $r_f(v, w) > 0$  alors l'arc dirigé  $(v, w)$  est un arc résiduel et le graph résiduel du préflot est  $G_f = (V, E_f)$  le graphe ayant pour ensemble de sommets  $V$  et pour ensemble d'arêtes  $E_f$ , les arcs résiduels. Un chemin  $f$ -augmentant est un chemin de  $s$  à  $t$  dans  $G_f$ .

1. (rappel) Montrer qu'un flot est maximal si et seulement si il n'existe pas de chemin  $f$ -augmentant (on pourra considérer l'ensemble  $S_f = \{v \in V \mid \text{il existe un chemin de } s \text{ à } v \text{ dans } G_f \cup \{s\}\}$ )
2. (rappel) En déduire le théorème de Ford et Fulkerson. Comment à partir d'un flot maximal trouver une  $(s, t)$ -coupe minimale ?

Pour définir l'algorithme, nous avons besoin d'une fonction de l'ensemble des sommets dans  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  telle que :  $h(s) = n$ ,  $h(t) = 0$  et  $h(v) \leq h(w) + 1$  pour toute arête résiduelle  $(v, w)$ . Nous appellerons une fonction satisfaisant ces conditions une fonction hauteur pour  $f$ . Un sommet  $v$  sera dit actif si  $v \in V \setminus \{s, t\}$ ,  $h(v) < \infty$  et  $e(v) > 0$ .

L'algorithme commence avec le préflot  $f$  qui est égal à la capacité des arêtes pour chaque arête sortant de la source et zéro sur toutes les autres arêtes. La fonction de hauteur initiale est  $h(s) = n$  et  $h(v) = 0$  pour tout  $v \in V \setminus \{s\}$ . L'algorithme réalise ensuite les deux opérations *push* et *relabel* tant que possible et dans un ordre quelconque. Lorsqu'il n'y a plus de sommets actifs, l'algorithme a terminé.

$push(v, w)$  :

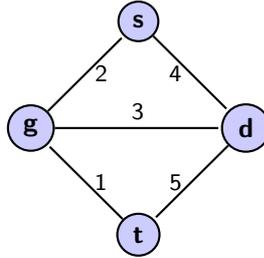
- Conditions :  $v$  est actif,  $r_f(v, w) > 0$  et  $h(v) = h(w) + 1$ .
- Action : envois  $\delta = \min(e(v), r_f(v, w))$  de flot de  $v$  vers  $w$  comme suit :

$$f(v, w) \leftarrow f(v, w) + \delta, f(w, v) \leftarrow f(w, v) - \delta, e(v) \leftarrow e(v) - \delta, e(w) \leftarrow e(w) + \delta.$$

$relabel(v)$

- Conditions :  $v$  est actif et  $\forall w \in V$ , si  $r_f(v, w) > 0$  alors  $h(v) \leq h(w)$ .
- Action :  $h(v) \leftarrow \min\{h(w) + 1 \mid (v, w) \in E_f\}$  (avec le minimum sur l'ensemble vide égal à  $\infty$ ).

3. Vérifier que l'algorithme est correct sur l'exemple suivant (graphe non-orienté, i.e.  $c(u, v) = c(v, u)$ ) :



Nous allons montrer que l'algorithme est correct et étudier sa complexité. Nous dirons qu'une opération  $push(v, w)$  est saturante si  $r_f(v, w) = 0$  après le  $push$  et non-saturante sinon.

4. Si  $f$  est un préflot,  $h$  une fonction de hauteur pour  $f$  et  $v$  un sommet actif, montrer qu'alors une opération  $push$  ou  $relabel$  est applicable sur  $v$ .
5. Montrer qu'à tout moment, la fonction  $h$  est une fonction de hauteur pour  $f$ .
6. Montrer que si  $f$  est un préflot et  $h$  une fonction de hauteur pour  $f$  alors le puits  $t$  n'est pas atteignable depuis la source  $s$  dans  $G_f$ .
7. En utilisant le résultat de la question 1, en déduire que si l'algorithme termine et que toutes les hauteurs sont finies alors le préflot calculé est un flot maximal.
8. Montrer que pour tout sommet  $v$ , la hauteur  $h(v)$  ne décroît jamais. De plus, une opération  $relabel(v)$  augmente  $h(v)$  strictement.
9. Soit  $f$  un préflot et  $S$  l'ensemble des sommets atteignables depuis  $v$  dans  $G_f$ . Montrer que si  $s \notin S$  alors  $\sum_{w \in S} e(w) \leq 0$ . En déduire que si  $v$  est tel que  $e(v) > 0$  alors la source  $s$  est atteignable depuis  $v$  dans  $G_f$ .
10. En déduire qu'à tout moment de l'exécution de l'algorithme et pour tout sommet  $v$ , on a  $h(v) \leq 2n - 1$ .
11. En déduire que le nombre total d'opération  $relabel$  est borné par  $2n^2$ . En déduire également que le nombre d'opérations  $push$  saturante est borné par  $2nm$ .
12. Soit  $\Phi = \sum_{v: v \text{ actif}} h(v)$ . Montrer qu'une opération  $push$  non-saturante fait décroître  $\Phi$  d'au moins 1. En déduire que le nombre d'opérations  $push$  non-saturante est au plus  $4n^2m$ .
13. En déduire que l'algorithme finit après  $O(n^2m)$  opérations élémentaires.

## Exercice 2 Inégalité de Cheeger

Dans tout cet exercice,  $G$  est un graphe  $d$ -régulier simple. On définit la connectivité d'une coupe par :

$$\phi(S) = \frac{e(S, V - S)}{\frac{d}{|V|} |S| |V - S|},$$

et la constante isopérimétrique par :  $\phi(G) = \min_{S \subset V, S \neq \emptyset, V} \phi(S)$ .

L'expansion d'une coupe est définie par :

$$h(S) = \frac{e(S, V-S)}{d \min\{|S|, |V-S|\}},$$

et le taux d'expansion par :  $h(G) = \min_{S \subset V, S \neq \emptyset, V} h(S)$ . Le calcul de  $h(G)$  est NP-difficile et le meilleur algorithme dû à Arora, Rao & Vazirani (2009) donne une  $O(\sqrt{\log n})$  approximation.

1. Montrer que

$$h(G) \leq \phi(G) \leq 2h(G).$$

On considère  $M = \frac{1}{d}A$  la matrice d'adjacence normalisée du graphe  $G$  de valeurs propres  $1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Le but de l'exercice est de montrer que

$$\frac{1 - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2(1 - \lambda_2)}.$$

2. Montrer que :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|=1, \mathbf{x} \perp \mathbf{1}} \mathbf{x}^t M \mathbf{x}, \\ \lambda_n &= \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^t M \mathbf{x} \end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout vecteur  $\mathbf{x}$ ,

$$\sum_{i,j} M_{ij} (x_i - x_j)^2 = 2\mathbf{x}^t \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^t M \mathbf{x}.$$

En déduire que

$$1 - \lambda_2 = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|=1, \mathbf{x} \perp \mathbf{1}} \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} (x_i - x_j)^2,$$

puis que  $\lambda_2 = 1$  si et seulement si  $G$  n'est pas connexe.

4. Montrer que pour tout vecteur  $\mathbf{x}$  :

$$\sum_{i,j} M_{ij} (x_i + x_j)^2 = 2\mathbf{x}^t \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^t M \mathbf{x}.$$

En déduire que  $\lambda_n = -1$  si et seulement si une composante de  $G$  est bipartie.

5. Montrer que

$$\phi(G) = \min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^V - \{0,1\}} \frac{\sum_{i,j} M_{ij} |x_i - x_j|^2}{\frac{1}{n} \sum_{i,j} |x_i - x_j|^2}$$

6. Montrer que

$$1 - \lambda_2 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^V - \mathbb{R}\mathbf{1}} \frac{\sum_{i,j} M_{ij} |x_i - x_j|^2}{\frac{1}{n} \sum_{i,j} |x_i - x_j|^2}.$$

7. En déduire que  $1 - \lambda_2 \leq \phi(G) \leq 2h(G)$ .

Pour montrer l'autre inégalité, nous introduisons l'algorithme suivant :

#### Partition Spectrale

– Entrée : graphe  $G = (V, E)$  et un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^V$ .

- Trier les sommets de  $V$  selon l'ordre décroissant des entrées de  $\mathbf{x}$ , c'est à dire  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  avec  $x_{v_1} \leq x_{v_2} \leq \dots \leq x_{v_n}$ .
- soit  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  tel que  $h(\{v_1, \dots, v_i\})$  soit minimal.
- Sortie :  $S = \{v_1, \dots, v_i\}$ .

Etant donné un graphe  $G$  et un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^V$ , on définit :

$$\delta = \frac{\sum_{i,j} M_{ij} |x_i - x_j|^2}{\frac{1}{n} \sum_{i,j} |x_i - x_j|^2},$$

où  $M$  est la matrice d'adjacence normalisée. Nous allons montrer que si  $S$  est la sortie correspondante de l'algorithme alors  $h(S) \leq \sqrt{2\delta}$ .

Pour simplifier les notations, on suppose que  $V = \{1, \dots, n\}$  et que  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , de telle sorte que notre but est de montrer qu'il existe  $i$  tel que  $h(\{1, \dots, i\}) \leq \sqrt{2\delta}$ . Pour cela nous allons utiliser la méthode probabiliste.

8. Montrer que l'on peut supposer que  $x_{\lfloor n/2 \rfloor} = 0$  et  $x_1^2 + x_n^2 = 1$  sans perte de généralité.
9. Soit  $T$  une variable aléatoire à valeur dans  $[x_1, x_n]$  telle que  $\mathbb{P}(a \leq t \leq b) = \int_a^b 2|t| dt$  pour  $x_1 \leq a \leq b \leq x_n$ . Soit  $S_T = \{i, x_i \leq T\}$ . Montrer que

$$\mathbb{E}[\min\{|S_T|, |V - S_T|\}] = \sum_i x_i^2.$$

10. Montrer que

$$\mathbb{P}((i,j) \text{ est coupé par } (S_T, V - S_T)) \leq |x_i - x_j| (|x_i| + |x_j|).$$

11. En déduire que

$$\frac{1}{d} \mathbb{E}[e(S_T, V - S_T)] \leq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i,j} M_{ij} (x_i - x_j)^2} \sqrt{\sum_{i,j} M_{ij} (|x_i| + |x_j|)^2}$$

12. Montrer que  $\sum_{i,j} M_{ij} (x_i - x_j)^2 \leq 2\delta \sum_i x_i^2$  et que  $\sum_{i,j} M_{ij} (|x_i| + |x_j|)^2 \leq 4 \sum_i x_i^2$ . En déduire que  $\frac{1}{d} \mathbb{E}[e(S_T, V - S_T)] \leq \sqrt{2\delta} \sum_i x_i^2$ .
13. En déduire qu'il existe  $S$  de la forme  $\{1, \dots, i\}$  tel que  $h(S) \leq \sqrt{2\delta}$ .
14. En déduire que  $h(G) \leq \sqrt{2(1 - \lambda_2)}$  et que l'algorithme *Partition Spectrale* permet de trouver  $S$  tel que  $h(S) \leq 2\sqrt{h(G)}$ .