MAP 311: Aléatoire PC 7

Marc Lelarge

13 juin 2016

Exercice 1

Soit $F(x)$ une fonction de répartition de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que $F(x) = 0$ si $x \leq a$, $0 < F(x) < 1$ si $a < x < b$, $F(x) = 1$ si $x \geq b$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. i.i.d. de fonction de répartion $F(x)$. On note $Y_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$, $Z_n = \sup(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$ et $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} b$.

2. Montrer que si les X_n sont uniformément distribués sur $[0, 1]$, $nY_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Exp(1)$.

Exercice 2: erreurs d'arrondi

Dans un programme de calcul, l'opérateur décide d'utiliser J chiffres significatifs apres la virgule et d'arrondir tous les résultats d'opérations à $\frac{1}{2}10^{-J}$ près. On suppose qu'il effectue 10^6 opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur $[-\frac{1}{2}10^{-J}, \frac{1}{2}10^{-J}]$, et que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération. Calculer la probabilité pour que l'erreur finale soit inférieure ou égale en valeur absolue à $\frac{1}{2}10^{-J+3}$. On donne $2\Pi(\sqrt{3}) - 1 \sim 92\%$ où Π représente la fonction de répartition de la loi $N(0, 1)$.

Exercice 3: Convergence en probabilité et convergence en loi

1. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r. et si X est une v.a.r. constante, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X si et seulement si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers X;

2. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. X et si $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une constante c alors $(X_n, Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers (X, c) (lemme de Slutsky);

3. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. X et si $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une v.a.r. Y indépendante des X_n alors $(X_n, Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers (X, Y') où Y' est indépendante de X et de même loi que Y (version du lemme de Slutsky);

4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable, de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. En notant $\hat{m}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ et $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - \hat{m}_n)^2$, montrer que
$$\sqrt{n}\frac{\hat{m}_n - m}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exercice 4: Théorème de Cramèr-Wold

Montrer que la loi d'un vecteur aléatoire X de $\mathbb{R}^n$ est caractérisée par les lois de ses projections de dimension 1, c'est-à-dire $\langle X, v\rangle$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 5: Méthode Delta

Supposons que $A_n(Z_n - B_n) \xrightarrow{\text{loi}} L$ où $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ sont des suites déterministes telles que

$A_n \to \infty$ et $B_n \to B$. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(B) \neq 0$, alors $a_n(f(Z_n) - b_n) \to L$ en loi, où $a_n = A_n/f'(B)$ et $b_n = f(B_n)$. Application aux fluctuations en statistique: $A_n(Z_n - B_n) = \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$.

Exercice 6: Téléphonie
Un central téléphonique dessert 5000 abonnés. À tout instant, un abonné a une probabilité égale à 0.02 d'utiliser son téléphone. Les appels des abonnés sont supposés indépendants entre eux. Quel est le nombre d'abonnés que le central doit être capable de traiter simultanément pour qu'à tout instant, la probabilité que tous les abonnés ne puissent être satisfaits soit inférieure à 2,5% ?

Exercice 7: Sondage
Dans une population de très grande taille, un sondage, effectué par tirage uniforme sans remise, sur la popularité du premier ministre indique que 51% des personnes interrogées sont favorables à sa politique. Proposer une modélisation avec une loi hypergéométrique, puis avec des v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli. Donner un intervalle bilatéral symétrique de niveau de confiance asymptotique 95% pour la proportion p de personnes favorables au premier ministre. Le sondage a été réalisé auprès de $n = 1000$ personnes. Même question si $n = 10000$.

Exercice 8: Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $[0, \theta]$.

1. Étudier la convergence, le biais, la variance, l'écart quadratique moyen, et la fluctuation asymptotique de l'estimateur $m_n = 2(X_1 + \cdots + X_n)/n$ de θ. Construire un intervalle de confiance asymptotique;
2. Montrer que l'estimateur $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ de θ a pour densité $(n/\theta)(x/\theta)^{n-1}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$ puis calculer $\mathbb{E}(M_k)$ et $Var(M_k)$. Comparer avec l'estimateur moyenne empirique m_n;
3. Montrer que $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$. Montrer de deux manières différentes que la convergence est p.s.;
4. Montrer que $W_n = n(M_n/\theta - 1)$ converge en loi quand $n \to \infty$, et déterminer la limite. Construire un intervalle de confiance asymptotique.
5. Montrer que M_n est l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ.

Exercice 9: Extrêmes
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi L, de fonction de répartition F. On s'intéresse au comportement asymptotique de $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $F_{M_n}(x) = F^n(x)$;
2. Weibull: Montrer que si $L = \mathrm{Unif}([0, \theta])$ alors $n(\theta^{-1}M_n - 1)$ converge en loi quand $n \to \infty$.
3. Gumbel: montrer que si $L = \mathrm{Exp}(\lambda)$ alors $\lambda M_n - \ln(n)$ converge en loi quand $n \to \infty$.
4. Fréchet: montrer que si $L = \mathrm{Cauchy}$ alors $\pi n^{-1} M_n$ converge en loi quand $n \to \infty$.
5. Cas dégénéré: montrer que si $L = \mathrm{Bern}(p)$ avec $0 < p < 1$ alors $M_n \to 1$ p.s.
6. Montrer que $M_n \to x_F$ p.s. où $x_F := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.