Algorithmique
Travaux dirigés, 17 janvier 2006
Louis Granboulan

Systèmes d'équations polynomiales : les polynômes réels

1 Séparation des zéros pour les polynômes réels

On veut énumérer les solutions réelles d'un système d'équations et d'inéquations à une variable. L'impossibilité de faire des calculs exacts sur les réels amène à se restreindre aux calculs sur les rationnels. Ceux-ci étant denses, ils peuvent servir à isoler les solutions afin d'obtenir un algorithme ne faisant pas d'erreur.

1. **Isolement des racines.** Une racine réelle d'un polynôme est isolée si on connaît un intervalle de bornes rationnelles tel que celle-ci soit la seule racine du polynôme dans l'intervalle. Expliquer pourquoi l'isolement est toujours possible.
2. **Application à un système d'(in)équations.** Montrer que pour connaître l'ensemble des solutions réelles d'un système d'équations et d'inéquations polynomiales à coefficients rationnels, il suffit de savoir isoler les racines réelles d'un polynôme.
3. **Cas des racines multiples.** Montrer que pour isoler les racines réelles d'un polynôme, il suffit de savoir le faire pour un polynôme sans facteurs multiples.
4. **Suite de Sturm.** Si on suppose le polynôme f à coefficients entiers et sans facteurs multiples, on définit la suite $f_0 = f$, $f_1 = f'$ et $f_{i+2} = -(f_i \bmod f_{i+1})$. Expliciter le lien entre les suites de Sturm et les p.g.c.d. Qu'en déduire ?
5. **Théorème de Sturm.** On appelle *variation en y* et on note $V(y)$ le nombre de changements de signe de la suite $(f_i(y))$, en négligeant les 0 de cette suite. Le théorème de Sturm énonce que si $a < b$ ne sont pas racines réelles de f, alors le nombre de racines réelles de f dans l'intervalle est $V(a) - V(b)$. Montrer le théorème de Sturm, en commençant par les lemmes ci-dessous :
   (a) Deux éléments voisins de la suite de Sturm ne s'annulent pas simultanément.
   (b) En un point où un élément de la suite de Sturm s'annule, ses voisins sont de signes distincts.
   (c) Dans un voisinage d'une racine de f, f' est de signe constant.
6. **Application : découpage d'un intervalle contenant toutes les racines.** Pour utiliser le théorème de Sturm, on a besoin de connaître un intervalle contenant les racines de f. En posant $f(x) = x^n + \sum_{i=0..n-1} a_i x^i$, Cauchy a prouvé que pour toute racine z on a :
   $$|z| \leqslant 1 + \max_{i=0..n-1} |a_i|$$
   $$|z| \leqslant \max_{i=0..n-1} |na_i|^{1/(n-i)}$$
   Knuth quant à lui a prouvé :
   $$|z| \leqslant 2 \max_{i=0..n-1} |a_i|^{1/(n-i)}$$
   Prouver le premier de ces résultats, et éventuellement les autres.
7. **Conclusion.** Montrer que notre problème est résolu. Que penser de la complexité de l'algorithme ?

2 Un peu plus sur les polynômes de Cauchy

On appelle polynôme de Cauchy tout multiple d'un polynôme $f(x) = x^n - \sum_{i=0..n-1} a_i x^i$ tel que les a_i soient tous positifs.

1. **Unicité de la racine positive.** Montrer qu'un polynôme de Cauchy n'a qu'une racine positive, qu'on va appeler $\rho(f)$. Si p n'est pas un polynôme de Cauchy, on appellera $\rho(f)$ l'unique racine positive du polynôme de Cauchy associé.
2. **De l'intérêt du calcul de $\rho(f)$.** Un résultat récent (2002) montre que pour tout polynôme f de degré n et de racines réelles z_i on a $\max_i |z_i|/\rho(f) \in [2^{1/n} - 1, 1]$. Montrer que la borne inférieure est atteinte dans le cas où f a une racine réelle de multiplicité n.
3. **Calcul de $\rho(f)$.** Soit x_0 un majorant de $\rho(f)$. L'algorithme de Newton calcule $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$. Une variante proposée par Kahane commence par itérer $x_{i+1} = x_i - 2f(x_i)/f'(x_i)$, tant que $f(x_i)f(x_{i-1}) > 0$. Montrer que c'est plus rapide.
4. **Borne de Cauchy de la dérivée.** Montrer que $0 \leqslant \rho(f')/\rho(f) \leqslant 1$. On peut aussi montrer que si l'un des a_i est non nul, $\min\{(\frac{1-c}{n})^{1/(n-1)}, (1 - 1/n)(1 - c)\} \leqslant \rho(f')/\rho(f) \leqslant 1 - 1/n$, où $c = a_0\rho(f)^{-n}$.
5. **Sous-additivité.** Bojanov a montré en 1970 que si $f(x) = x^n - \sum_{i=0..n-1} a_i x^i$ et $g(x) = x^n - \sum_{i=0..n-1} b_i x^i$ sont deux polynômes de Cauchy, alors en posant $h(x) = x^n - \sum_{i=0..n-1}(a_i^{1/(n-i)} + b_i^{1/(n-i)})^{n-i} x^i$, on a $\rho(h) \leqslant \rho(f) + \rho(g)$. En déduire des conséquences sur des techniques algorithmiques de majoration de ρ.