Les correcteurs attendent des réponses claires et précises aux questions posées. Les candidats prendront garde à ne pas détailler exagérément les réponses aux questions faciles.

1 Introduction

Un *ensemble d'états* est un ensemble fini qui sera noté S dans la suite. Soit n un entier strictement positif, une *configuration* de *dimension* n sur l'ensemble d'états S est une application de $\mathbb{Z}^n$ dans S. L'ensemble des configurations de dimension n sur S est donc noté $S^{\mathbb{Z}^n}$.

Un *automate cellulaire* est défini par un quadruplet (n, S, V, δ) dans lequel
- n est un entier indiquant la *dimension* ;
- S est un *ensemble d'états* ;
- $V = (v_1, \dots, v_l)$ est un l-uplet composé d'éléments de $\mathbb{Z}^n$. On appelle V le *voisinage* et les v_i sont appelés les *voisins* ;
- $\delta :\ S^l \to S$ est la *fonction locale* de l'automate cellulaire.

Un automate cellulaire $\mathcal{A} = (n, S, V, \delta)$ transforme une configuration en une autre configuration par sa *fonction globale* (notée aussi $\mathcal{A}$ par abus de langage) définie de $S^{\mathbb{Z}^n}$ dans $S^{\mathbb{Z}^n}$ comme suit :

$$\forall c \in S^{\mathbb{Z}^n}, \forall u \in \mathbb{Z}^n,\ \mathcal{A}(c)(u) = \delta(c(u + v_1), \dots, c(u + v_l))\ .$$

Un automate cellulaire est dit bijectif (respectivement injectif, surjectif) si sa fonction globale est bijective (respectivement injective, surjective).

Les automates cellulaires sont, entre autres, utilisés pour modéliser des phénomènes dynamiques discrets en physique ou en biologie. Dans ce cadre de modélisation, les configurations périodiques et finies, et les propriétés de surjectivité, injectivité, bijectivité et réversibilité sont cruciales. Nous allons les étudier dans ce problème.

1.1 Exemples

Un automate cellulaire de "translation" est un automate cellulaire de la forme $\sigma_u = (n, S, (-u), \mathrm{Id})$, où u est un élément de $\mathbb{Z}^n$ et où Id est la fonction identité. Un tel automate translate les configurations suivant u.

L'automate cellulaire "xor" noté $\mathcal{X}$ est le quadruplet $(1, \{0, 1\}, (0, 1), \delta_{\mathcal{X}})$ où $\delta_{\mathcal{X}} :\ (x, y) \mapsto x + y \mod 2$.

Question 1.1 *Montrez que $\mathcal{X}$ est surjectif et que toute configuration de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ admet exactement 2 antécédents par $\mathcal{X}$.*

1.2 Périodicité

Soit une configuration $c \in S^{\mathbb{Z}^n}$. Un élément $l = (l_1, \ldots, l_n)$ de $\mathbb{Z}^n$ est une période de c si $l \neq (0, \ldots, 0)$ et si

$$\forall \lambda \in \mathbb{Z},\ \forall u \in \mathbb{Z}^n,\ c(u + \lambda l) = c(u + (\lambda l_1, \ldots, \lambda l_n)) = c(u)\ .$$

Une configuration $c \in S^{\mathbb{Z}^n}$ est dite *totalement périodique* si elle est périodique suivant les n directions des axes ; *i.e.* s'il existe $(p_1, \ldots, p_n) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^n$ tels que $(p_1, 0, \ldots, 0), (0, p_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, p_n)$ soient des périodes de c.

Soit $p = (p_1, \ldots, p_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$, on notera $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des configurations totalement périodiques de périodes $(p_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, p_n)$ et on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des configurations totalement périodiques (S et n étant sous-entendus).

Question 1.2 *Montrez que pour tout $p \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$, $\mathcal{A}(\mathcal{P}_p) \subset \mathcal{P}_p$ et donc que $\mathcal{A}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ (*i.e.* l'image d'une configuration totalement périodique est totalement périodique). Donnez un exemple d'automate cellulaire tel que ces inclusions soient strictes.*

On note $\mathcal{A}\,|_{\mathcal{P}}$ la restriction de $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ (*i.e.* $\mathcal{A}\,|_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$).

1.3 Finitude

Soit q un état de S. Une *configuration q-finie* c est une configuration presque partout égale à q, *i.e.* $c(u)$ ne peut être différent de q que pour un nombre fini de u dans $\mathbb{Z}^n$. On notera $\mathcal{F}_q$ l'ensemble des configurations q-finies de $S^{\mathbb{Z}^n}$ (S et n étant sous-entendus).

Question 1.3 *Soit $q \in S$. Montrez que l'image d'une configuration q-finie par un automate cellulaire est q'-finie pour un certain q' (*i.e.* $\exists q'$, $\mathcal{A}(\mathcal{F}_q) \subset \mathcal{F}_{q'}$). On donnera une expression de q' en fonction de $\mathcal{A}$.*

On note $\mathcal{A}\,\big|_{\mathcal{F}_q}$ la restriction de $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}_q$ dans $\mathcal{F}_{q'}$ (*i.e.* $\mathcal{A}\,\big|_{\mathcal{F}_q} : \mathcal{F}_q \to \mathcal{F}_{q'}$).

Question 1.4 *Pour $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on note $\mathcal{A}^k$ la composée k-ième de $\mathcal{A}$. Justifiez que $\mathcal{A}^k$ est la fonction globale d'un automate cellulaire dont on exprimera le voisinage et la fonction locale en fonction du voisinage et de la fonction locale de $\mathcal{A}$. Montrez qu'il existe $q \in S$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $\mathcal{A}^k(\mathcal{F}_q) \subset \mathcal{F}_q$.*

2 Propriétés générales

On admettra le théorème suivant dont la preuve est combinatoire :

Théorème 1 (Moore et Myhill 1962-63) *Un automate cellulaire $\mathcal{A}$ est surjectif si et seulement s'il existe $q \in S$ tel que $\mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q}$ est injectif.*

Question 2.1 *Montrez qu'un automate cellulaire est bijectif si et seulement s'il est injectif.*

Question 2.2 *Montrez que s'il existe $q_0 \in S$ tel que $\mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_{q_0}}$ est injectif, alors pour tout $q \in S$, $\mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q}$ est injectif.*

Question 2.3 *Soit $\mathcal{A}$ un automate cellulaire. Montrez que $\mathcal{A}\,|_{\mathcal{P}}$ est bijectif si et seulement si $\mathcal{A}\,|_{\mathcal{P}}$ est injectif. Indication : on pourra considérer $\mathcal{A}\big|_{\mathcal{P}_p}$, pour un p fixé.*

Dans la suite, on définit la boule de rayon k et de centre 0 par $\mathcal{B}_k = \{(x_1, \ldots, x_n),\ \ \forall i, |x_i| \leq k\}$. On note $c\,|_{\mathcal{B}_k}$ la restriction de la configuration c à $\mathcal{B}_k$.

Question 2.4 *Soit c une configuration et $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de configurations vérifiant pour tout k, $c_k\,|_{\mathcal{B}_k} = c\,|_{\mathcal{B}_k}$. Supposons que les configurations c_k ont chacune au moins un antécédent par $\mathcal{A}$ noté d_k (*i.e.* $\mathcal{A}(d_k) = c_k$).*
a) Soit x_0 un point de $\mathbb{Z}^n$. Montrez qu'il existe un ensemble infini $I_0 \subset \mathbb{N}$ tel que $\{d_k(x_0),\ k \in I_0\}$ soit un singleton que l'on notera $\{d(x_0)\}$.
b) Soit x_1 un autre point de $\mathbb{Z}^n$. Montrez qu'il existe un ensemble infini $I_1 \subset I_0$ tel que $\{d_k(x_1),\ k \in I_1\}$ soit un singleton que l'on notera $\{d(x_1)\}$.
c) Choisissez une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de façon à définir une configuration d dont on montrera qu'elle vérifie $\mathcal{A}(d) = c$.

Question 2.5 *a) En utilisant la question précédente sur des configurations c, c_k et d_k convenablement choisies, montrez que s'il existe $q \in S$ tel que $\mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q}$ est surjectif, alors $\mathcal{A}$ est surjectif. Indication : on choisira pour les c_k des configurations q'-finies.*
b) En utilisant la question 2.4 sur des configurations convenablement choisies, montrez que si $\mathcal{A}\,|_{\mathcal{P}}$ est surjectif alors $\mathcal{A}$ est surjectif.

Pour tout $q \in S$, notons $\overrightarrow{q}$ la configuration de $S^{\mathbb{Z}^n}$ valant q en tout point.

Question 2.6 *On considère un état $q \in S$ et on note q' l'état tel que $\mathcal{A}(\overrightarrow{q}) = \overrightarrow{q}'$. Soit a une configuration q'-finie admettant un antécédent par $\mathcal{A}$, noté b, qui ne soit pas une configuration q-finie.*
a) Toujours en utilisant la question 2.4 sur des configurations convenablement choisies à partir de a et de b, montrez que la configuration $\overrightarrow{q}'$ admet par $\mathcal{A}$ un autre antécédent que $\overrightarrow{q}$.
b) Montrez que si $\mathcal{A}$ est bijectif, alors pour tout q, $\mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q}$ est bijectif.

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\mathcal{A} \text{ bijectif} \iff \mathcal{A} \text{ injectif}} & & \\
\Downarrow \not\Uparrow & & \Downarrow \\
\exists q,\ \mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q} \text{ bijectif} & \not\Rightarrow^{3} & \boxed{\mathcal{A}|_{\mathcal{P}} \text{ bijectif} \iff \mathcal{A}|_{\mathcal{P}} \text{ injectif}} \\
\Updownarrow & & \Downarrow \not\Uparrow^{2} \\
\exists q,\ \mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q} \text{ surjectif} & {}^{1}\not\Leftarrow & \boxed{\mathcal{A}|_{\mathcal{P}} \text{ surjectif}} \\
\Downarrow \not\Uparrow & & \Downarrow \\
\multicolumn{3}{c}{\boxed{\forall q,\ \mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q} \text{ injectif} \iff \exists q,\ \mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q} \text{ injectif} \iff \mathcal{A} \text{ surjectif}}}
\end{array}
$$

FIG. 1: Diagramme des implications

Question 2.7 *Justifiez toutes les implications du diagramme de la figure 1 (on prouvera dans la section 5.1 les non-implications représentées par des doubles flèches rayées).*

3 Algorithmes de décision en dimension 1

Dans cette section ainsi que dans la suivante, on demande à plusieurs reprises (questions 3.6, 3.9, 4.1 et 4.2) de proposer des algorithmes opérant soit sur des graphes, soit sur des automates cellulaires. On exprimera ces algorithmes avec un point de vue de haut niveau, sans décrire leur implantation effective ni les structures de données utilisées. Les étapes élémentaires d'un algorithme seront les manipulations élémentaires sur le graphe ou sur l'automate cellulaire (par exemple : emprunter un arc étiqueté i à partir du nœud courant ; évaluer la fonction locale en un l-uplet donné).

Dans cette section, on s'intéresse aux automates cellulaires en dimension 1 ($n = 1$). De plus, on considère des automates cellulaires dont le voisinage est du type $V = \{0, \dots, r-1\}$ (r pour "rayon d'action"). Dans cette section, les automates cellulaires seront donc représentés par des triplets de la forme (S, r, δ). On remarquera que tout automate cellulaire de dimension 1, quitte à être composé par un automate cellulaire de translation, peut être ramené à un automate cellulaire ayant un voisinage du type précédent.

3.1 Graphes de *de Bruijn*

Un *graphe orienté étiqueté* est un quadruplet (N, A, L, e) où N est un ensemble fini dont les éléments sont les *nœuds* du graphe, où A est une partie de N^2 dont les éléments sont les *arcs* entre les nœuds, où L est un ensemble fini dont les éléments sont les *étiquettes*, et e une fonction de A dans L étiquetant les arcs du graphe. Graphiquement, un nœud est représenté par un point et un arc (x, y) par une flèche orientée du point x vers le point y et surmontée de l'étiquette $e((x, y))$.

Le graphe de *de Bruijn* associé à un automate cellulaire $\mathcal{A}$ est noté $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ (ou simplement $\mathcal{G}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible) et est défini comme le graphe orienté étiqueté $\mathcal{G} = (N, A, L, e)$ où

- $N = \{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{r-1},\ \alpha_i \in S,\ \forall i\}$ (*i.e.* l'ensemble des nœuds est exactement l'ensemble S^{r-1} des mots à $r-1$ lettres formés sur l'alphabet des états de $\mathcal{A}$) ;
- le couple (x, y) est un arc du graphe s'il existe un mot ω dans S^{r-2} ainsi que deux états a et b tels que $x = a\omega$, et $y = \omega b$;
- $L = S$;
- avec les notations ci-dessus, $e((x, y)) = \delta(a\omega b) = \delta(a, \omega_1, \ldots, \omega_{r-2}, b)$ si $\omega = \omega_1 \cdots \omega_{r-2}$ (*i.e.* les arcs sont étiquetés par les images par la fonction locale de l'automate cellulaire).

Question 3.1 *Dessinez le graphe de* de Bruijn *associé à l'automate cellulaire "xor".*

Dans un graphe orienté, un *chemin fini* est une suite $(x_0, \ldots, x_n)$ de nœuds telle que pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, (x_i, x_{i+1}) est un arc. Un *chemin bi-infini* est une suite de nœuds $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, (x_i, x_{i+1}) est un arc. Attention : dans un chemin, les flèches sont toutes orientées dans le même sens, celui des indices croissants.

Question 3.2 *Construisez une bijection entre les configurations et les chemins bi-infinis de $\mathcal{G}$. Décrivez les chemins bi-infinis associés aux configurations totalement périodiques et aux configurations q-finies. Comment lire dans le graphe $\mathcal{G}$ l'image d'une configuration par $\mathcal{A}$?*

Un graphe orienté est *fortement connexe* si pour tout couple de nœuds (x, y) il existe un chemin de x vers y.

Question 3.3 *Montrez que $\mathcal{G}$ est fortement connexe.*

Question 3.4 *Montrez qu'en dimension 1, $\mathcal{A}$ est surjectif si et seulement si $\mathcal{A}|_{\mathcal{P}}$ est surjectif.*

3.2 Graphe produit

En utilisant les notations de la section précédente, on définit le *graphe produit* d'un automate cellulaire $\mathcal{A}$ comme le graphe orienté étiqueté $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ (ou simplement $\mathcal{H}$) tel que $\mathcal{H} = (N', A', L', e')$ où

- $N' = N \times N$;
- $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in A'$ si $(x_1, x_2) \in A$ et $(y_1, y_2) \in A$ et $e((x_1, x_2)) = e((y_1, y_2))$ (*i.e.* si on considère séparément les deux coordonnées des nœuds, elles correspondent à des arcs de même étiquette dans $\mathcal{G}$) ;

- $L' = S$;
- si $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in A'$, alors $e'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = e((x_1, x_2)) = e((y_1, y_2))$ (*i.e.* l'étiquette est l'étiquette commune dans $\mathcal{G}$).

L'idée sous-jacente à l'utilisation de ce graphe est d'étudier simultanément les images par $\mathcal{A}$ des deux configurations représentées dans chacune des deux coordonnées.

On remarquera qu'un chemin bi-infini dans $\mathcal{H}$ correspond à deux configurations de $S^{\mathbb{Z}^n}$ (identiques ou non) ayant la même image par $\mathcal{A}$.

Question 3.5 *Dessinez le graphe produit associé à "xor".*

Un *sous-graphe* d'un graphe orienté G est un graphe ayant pour ensemble de nœuds un sous-ensemble des nœuds de G et pour ensemble d'arcs tous les arcs reliant ces nœuds dans G.

Soit $\mathcal{D}$ le sous-graphe obtenu par restriction de $\mathcal{H}$ aux nœuds pouvant appartenir à un chemin bi-infini.

Question 3.6 *Proposez un algorithme construisant $\mathcal{D}$ en au plus $\mathcal{O}(s^{2r})$ étapes élémentaires où s est la cardinalité de S.*

3.3 Algorithmes de décision

Une *composante fortement connexe maximale* (cfcm) d'un graphe orienté $G = (N, A)$ est un sous-graphe $G' = (N', A')$ de G vérifiant les propriétés suivantes :

- G' est fortement connexe ;
- pour tout N'' tel que $N' \subset N'' \subset N$ et tel que $N'' \neq N'$, le sous-graphe de G d'ensemble de nœuds N'' n'est pas fortement connexe (maximalité).

Dans la suite, on notera $\tilde{\mathcal{G}}$ la trace de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire le sous-graphe de $\mathcal{D}$ composé des nœuds de la forme $(x, x), x \in N$. On notera $\overline{\mathcal{G}}$ la cfcm de $\mathcal{D}$ contenant $\tilde{\mathcal{G}}$.

Question 3.7 *Montrez que l'automate cellulaire $\mathcal{A}$ est injectif si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*
i) $\overline{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}$ *;*
ii) $\overline{\mathcal{G}}$ *est l'unique cfcm de* $\mathcal{D}$*.*

Question 3.8 *Montrez qu'il existe $q \in S$ tel que $\mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q}$ est injectif si et seulement si $\overline{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}$.*

Question 3.9 *Proposez un algorithme décidant la surjectivité et la bijectivité de $\mathcal{A}$ en au plus $\mathcal{O}(s^{2r})$ étapes élémentaires, où s est la cardinalité de S. Cet algorithme doit prendre en entrée le triplet représentant $\mathcal{A}$, s'arrêter en* *au plus $\mathcal{O}(s^{2r})$ étapes élémentaires, et répondre "surjectif", "bijectif" ou "ni l'un ni l'autre" suivant les propriétés de $\mathcal{A}$.*

Question 3.10 *Montrez qu'en dimension 1, $\mathcal{A}|_{\mathcal{P}}$ est bijectif si et seulement si $\mathcal{A}$ est bijectif.*

4 Indécidabilité en dimension 2

Un automate cellulaire $\mathcal{A}$ est *réversible* s'il existe un automate cellulaire $\mathcal{B}$ (de même dimension, sur le même ensemble d'états) tel que $\mathcal{A}\circ\mathcal{B} = \mathcal{B}\circ\mathcal{A} = \mathrm{Id}$ (*i.e.* la composée des fonctions globales des deux automates est l'identité).

On admettra le théorème suivant qui peut être démontré soit à l'aide d'arguments topologiques simples, soit à l'aide d'arguments combinatoires du type de ceux de la question 2.4.

Théorème 2 (Richardson 1972) *Un automate cellulaire est bijectif si et seulement s'il est réversible.*

Dans la suite de la section, on fixe la dimension des automates cellulaires à 2. On admettra le théorème d'indécidabilité suivant dont la preuve est difficile :

Théorème 3 (Kari 1990) *Il n'existe pas d'algorithme prenant en entrée un automate cellulaire $\mathcal{A}$ de dimension 2, s'arrêtant toujours au bout d'un temps fini, et répondant "oui" si $\mathcal{A}$ est bijectif, "non" s'il ne l'est pas.*

Ce résultat est caractéristique de la dimension 2 (en fait de toutes les dimensions supérieures à 2) puisque l'algorithme de la question 3.9 a bien les propriétés requises par le théorème dans le cas de la dimension 1.

Dans les questions qui suivent, on s'intéresse juste à l'existence d'algorithmes et on ne cherche pas à optimiser leur complexité. En particulier, il n'est pas important que le temps qu'ils mettent à s'arrêter les rendent inutilisables dans la pratique.

Question 4.1 *Proposez un algorithme prenant en entrée un automate cellulaire $\mathcal{A}$, s'arrêtant et répondant "non" si $\mathcal{A}|_{\mathcal{P}}$ n'est pas injectif, ne s'arrêtant pas sinon.*

Question 4.2 *Proposez un algorithme prenant en entrée un automate cellulaire $\mathcal{A}$, s'arrêtant et répondant "oui" si $\mathcal{A}$ est bijectif, ne s'arrêtant pas sinon. Indication : on pourra utiliser le théorème 2.*

Question 4.3 *Que pensez-vous du résultat de la question 3.10 en dimension 2 ?*

5 Pour finir

5.1 Contre-exemples

Question 5.1 *Montrez les non-implications de la figure 1 à l'aide de contre-exemples bien choisis. Remarquez qu'il suffit de prouver les non-implications numérotées sur la figure 1 (2 contre-exemples suffisent pour cela).*

5.2 Périodicité

Revenons sur la périodicité telle qu'elle a été définie dans la partie 1.2. Une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_l)$ de l éléments de $\mathbb{Z}^n$ est dite *libre* si

$$\forall \lambda_1 \in \mathbb{Z}, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{Z},\ \left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i u_i = (0, \ldots, 0) \right) \implies (\ \forall i, \lambda_i = 0\ ).$$

Question 5.2 *Montrez que la cardinalité maximale d'une famille libre de $\mathbb{Z}^n$ est n. Soit $c \in S^{\mathbb{Z}^n}$ une configuration admettant pour périodes les éléments d'une famille libre de cardinalité n. Montrez que c est totalement périodique (c'est-à-dire périodique suivant les n directions des axes).*

5.3 Conclusion

Considérez le diagramme de la figure 2.

$$\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{l}{\boxed{\mathcal{A} \text{ bijectif} \iff \mathcal{A} \text{ réversible} \iff \mathcal{A} \text{ injectif}}} \\
\Downarrow \not\Uparrow & & \Downarrow \Uparrow^{\heartsuit} \\
\boxed{\begin{array}{c} \exists q,\ \mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q} \text{ bijectif} \\ \Updownarrow \\ \exists q,\ \mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q} \text{ surjectif} \end{array}} & \begin{array}{c} {}^{\clubsuit}\!\Longleftarrow \\ \not\Longrightarrow^{3} \\ \\ {}^{1}\not\Longleftarrow \\ \Longrightarrow^{\clubsuit} \end{array} & \begin{array}{c} \boxed{\mathcal{A}|_{\mathcal{P}} \text{ bijectif} \iff \mathcal{A}|_{\mathcal{P}} \text{ injectif}} \\ \Downarrow \not\Uparrow^{2} \\ \boxed{\mathcal{A}|_{\mathcal{P}} \text{ surjectif}} \end{array} \\
\Downarrow \not\Uparrow & & \Downarrow \Uparrow^{\clubsuit} \\
\multicolumn{3}{l}{\boxed{\forall q,\ \mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q} \text{ injectif} \iff \exists q,\ \mathcal{A}\big|_{\mathcal{F}_q} \text{ injectif} \iff \mathcal{A} \text{ surjectif}}}
\end{array}$$

FIG. 2: Diagramme précis des implications

Nous avons montré que l'implication $\Uparrow^{\heartsuit}$ est une implication vraie en dimension 1 et fausse en dimension 2, et que les implications $\Uparrow^{\clubsuit}$, $\Longrightarrow^{\clubsuit}$ et ${}^{\clubsuit}\!\Longleftarrow$ sont vraies en dimension 1.

Question 5.3 *Que pensez-vous des implications $\Uparrow^{\clubsuit}$, $\Longrightarrow^{\clubsuit}$ et ${}^{\clubsuit}\!\Longleftarrow$ en dimension 2 ?*