Corrigé de l'épreuve de Mathématiques-Informatique, Concours Info ENS Paris-Lyon-Cachan 2003

Jean Goubault-Larrecq* Jean Mairesse†

2 février 2004

Question 1.1. Soit $k = U(\sigma^{-1})$. Le minimum étant atteint, σ^{-1} s'écrit donc $eg_1 \dots g_k$, où les g_i sont dans $\mathcal{U}$. Donc $\sigma = eg_k^{-1} \dots g_1^{-1}$, où les g_i^{-1} sont encore dans $\mathcal{U}$ par définition, ce qui montre que $U(\sigma) \leq k = U(\sigma^{-1})$, et ce pour tout σ. On en déduit immédiatement que $U(\sigma^{-1}) \leq U(\sigma^{-1^{-1}}) = U(\sigma)$, en remplaçant σ par σ^{-1}. Donc $U(\sigma) = U(\sigma^{-1})$.

Soit $k = U(\sigma)$, $\ell = U(\tau)$, on peut donc écrire σ sous la forme $eg_1 \dots g_k$ et τ sous la forme $eg_{k+1} \dots g_{k+\ell}$. Il vient que $\sigma\tau = eg_1 \dots g_{k+\ell}$, donc $U(\sigma\tau) \leq k + \ell = U(\sigma) + U(\tau)$. □

Question 1.2. Sans perte de généralité, supposons $i < j$. Clairement, (i, j) est égal à ec_{ij} si $j = i+1$, et à $ec_{ij}c_{(j-1)i}$ si $j \geq i+2$. La dernière égalité est claire en particulier à condition de faire appel à l'indication de l'énoncé selon laquelle la composition avec c_{ij} consiste à déplacer la carte en position i à la position j : partant d'une pile

1	...	i	$i+1$	...	$j-1$	j	...	n

c_{ij} déplace d'abord la carte en position i à la position j, ce qui aboutit à

1	...	$i+1$	...	$j-1$	j	i	...	n

puis $c_{(j-1)i}$ déplace la carte en position $j-1$ (qui est celle numérotée j ci-dessus) à la position i, ce qui donne

1	...	j	$i+1$	...	$j-1$	i	...	n

La pile ci-dessus est, bien sûr, (i, j).

On pouvait aussi considérer d'autres solutions : $ec_{i(j-1)}c_{ji}$, ou $ec_{ji}c_{(i+1)j}$ ou encore $ec_{j(i+1)}c_{ij}$.

Si $j = i + 1$, on a donc $U((i, j)) \leq 1$. Or $U((i, j)) \neq 0$ sinon on aurait $(i, j) = e$, donc $U((i, j)) = 1$ dans ce cas.

Si $j \geq i + 2$, on a $U((i, j)) \leq 2$. Or $U((i, j)) \neq 0$ par le même argument, et $U((i, j)) \neq 1$ sinon (i, j) serait de la forme $c_{k\ell}$, ce qui est impossible. On en conclut que $U((i, j)) = 2$.

Remarque. Une proportion non négligeable des candidats "démontre" $U((i, j)) = |j - i|$. □

*LSV, ENS Cachan et INRIA Futurs projet SECSI et CNRS UMR 8643, 61, avenue du président-Wilson, 94235 Cachan Cedex. Email: goubault@lsv.ens-cachan.fr

†LIAFA, CNRS - Université Paris 7, Case 7014 - 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05. Email: mairesse@liafa.jusieu.fr

Question 1.3. Soit σ, et $i_1 < \ldots < i_k$ une sous-suite croissante maximale. Supposons $i < j$, et posons $E = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Si $i > i_k$, alors $i_1, \ldots, i_k$ est encore une sous-suite croissante de σc_{ij}, donc $L(\sigma c_{ij}) \geq L(\sigma)$. Sinon, soit p le plus petit indice $\leq k$ tel que $i_p \geq i$, et q le plus grand indice $\leq k$ tel que $i_q \leq j$, alors $i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1} - 1, \ldots, i_q - 1, i_{q+1}, \ldots, i_k$ est une sous-suite croissante de σc_{ij}, donc $L(\sigma c_{ij}) \geq L(\sigma) - 1$. De façon similaire, on montre que $L(\sigma c_{ji}) \geq L(\sigma) - 1$. En remplaçant σ respectivement par σc_{ji} et σc_{ij}, on en déduit que $L(\sigma) \geq L(\sigma c_{ji}) - 1$ et $L(\sigma) \geq L(\sigma c_{ij}) - 1$. On en déduit donc que $|L(\sigma c_{ij}) - L(\sigma)| \leq 1$ pour tous i, j.

Soit maintenant σ telle que $U(\sigma) = k$. On a $\sigma = e g_1 \ldots g_k$, où les g_i sont dans $\mathcal{U}$. Par l'inégalité ci-dessus et donnée en indication, $L(\sigma) \geq L(e) - k = n - k$, donc $L(\sigma) + U(\sigma) \geq n$.

Réciproquement, soit σ telle que $L(\sigma) = k$. Posons $i_1 < \ldots < i_k$ une sous-suite maximale de σ. On remarque d'abord que si $k < n$, alors on peut trouver i et j tels que σc_{ij} contient une sous-suite croissante de longueur $k + 1$. (Il est ici instructif de penser à comment l'on peut remettre en ordre un paquet de cartes en déplaçant une carte à la fois.) En effet, soit i un indice hors de $\{i_1, \ldots, i_k\}$, ce qui est possible car $k < n$. On peut découper de façon unique la sous-suite croissante en deux moitiés, $i_1, \ldots, i_p$ et $i_{p+1}, \ldots, i_k$ ($0 \leq p \leq k$, et $i_0 = 0$, $i_{k+1} = n + 1$) telles que $\sigma(i_1) < \ldots < \sigma(i_p) < \sigma(i) < \sigma(i_{p+1}) < \ldots < \sigma(i_n)$. La pile σc_{ij} avec $j = i_p + 1$ est la pile obtenue en replaçant la carte numéro i entre les deux moitiés, on obtient donc une nouvelle pile ayant une sous-suite croissante de longueur $k + 1$.

On démontre maintenant par récurrence sur $n - L(\sigma)$ que $L(\sigma) + U(\sigma) \leq n$. Si $n - L(\sigma) = 0$, alors $L(\sigma) = n$, donc $\sigma = e$ et $U(\sigma) = 0$. Sinon, par la construction ci-dessus il existe $g \in \mathcal{U}$ tel que $L(\sigma g) \geq L(\sigma) + 1$. Par hypothèse de récurrence $L(\sigma g) + U(\sigma g) \leq n$. Or $L(\sigma) \leq L(\sigma g) - 1$ par hypothèse, et $U(\sigma) \leq U(\sigma g) + 1$ par la question 1.1. Donc $L(\sigma) + U(\sigma) \leq n$.

Remarque. Très peu de candidats ont attaqué l'inégalité $L(\sigma) + U(\sigma) \leq n$ dont la preuve correspond essentiellement au tri par insertion.

□

Question 1.4. L'idée de base est illustrée en figure 1 : à chaque carte ajoutée (nécessairement en bas d'une colonne) ailleurs que dans la colonne de gauche, on ajoute un pointeur depuis la carte juste à gauche vers la carte ajoutée. Les pointeurs suivent ensuite les cartes lors de leurs déplacements.

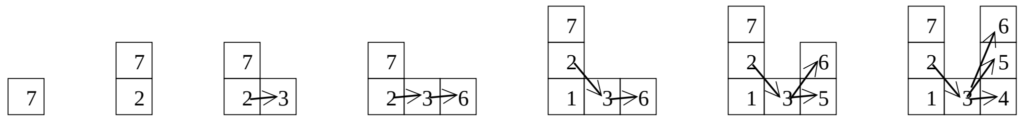


FIG. 1 – Réussite, avec pointeurs

On observe que les numéros des cartes sont en ordre croissant de bas en haut dans chaque colonne. C'est un invariant : c'est trivialement vrai lorsque seule la première carte est posée. Ensuite, toute carte, de numéro k, est ajoutée en bas d'une colonne dont tous les numéros sont supérieurs à k ; par hypothèse de récurrence, cette colonne est triée en ordre croissant de bas en haut, donc la nouvelle colonne est encore triée de même.

On montre maintenant que : $(*)$ s'il existe un pointeur de la carte en position i (de numéro $\sigma(i)$) vers la carte en position j (de numéro $\sigma(j)$), alors $i < j$ et $\sigma(i) < \sigma(j)$. C'est évident : lorsqu'on crée un tel pointeur, j est supérieur strictement à toutes les positions i des cartes précédemment posées ; d'autre part, si $\sigma(j)$ n'est pas posée dans la colonne de gauche, alors la colonne à gauche de celle où est posée $\sigma(j)$ contient nécessairement une carte de numéro inférieur à $\sigma(j)$. Comme les colonnes sont triées en ordre croissant de bas en haut, $\sigma(j) > \sigma(i)$, où $\sigma(i)$ est le numéro de la carte du bas de la colonne juste à gauche de $\sigma(j)$.

Il est d'autre part clair qu'au cours de la réussite, tout pointeur pointe d'une colonne vers la colonne immédiatement à sa droite (si elle existe). D'autre part, il est toujours vrai qu'il existe un chemin de cartes reliées par des pointeurs partant d'une carte de la colonne de gauche et aboutissant à la carte en bas à droite. Un tel chemin code donc, par la remarque $(*)$ ci-dessus, une sous-suite croissante de σ de longueur le nombre de colonnes de la réussite. En particulier, $L(\sigma)$ est supérieur ou égal à C, le nombre de colonnes de la réussite.

Montrons la réciproque. On remarque que les positions des cartes le long d'une colonne sont en ordre croissant de haut en bas : les colonnes, lues de haut en bas, sont donc des sous-suites décroissantes de σ. D'autre part, l'union disjointe des cartes présentes dans chaque colonne est l'ensemble de toutes les cartes de la pile σ. On en déduit que toute sous-suite croissante de σ ne peut contenir qu'au plus une carte par colonne. Donc $L(\sigma)$ est inférieur ou égal à C.

Remarque. La partie difficile était évidemment de montrer que $L(\sigma) \geq C$. Différentes variantes étaient possibles, on a présenté la plus simple. $\square$

Question 1.5. Il y a plusieurs réponses possibles. La première exploite les propriétés des pointeurs dans les réussites. Constatant que toute carte qui n'est pas en première colonne, et qui est la source d'un pointeur est aussi la carte d'arrivée d'un autre, et unique, pointeur, il suffit de poser k égal au nombre de colonnes de la réussite finale, x égal à la position de la carte en bas à droite de la réussite, i_k égal à x, et pour j variant de $k-1$ à 1 par pas de -1, si y est l'unique carte qui pointe vers x, alors $x \leftarrow y$ et $i_j \leftarrow y$. Ceci fournit une suite croissante $i_1, \ldots, i_k$ en temps polynomial, la construction de la réussite étant elle-même en temps polynomial.

On pouvait donc par exemple donner l'algorithme suivant prenant en entrée $n \in \mathbb{N}^*$ et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Pour tout i de 1 à n, $col[i]$ est un tableau, initialement vide, et correspondant à la i-ième colonne de la réussite. La variable *largeur* correspondant au nombre de colonnes non vides. Le tableau *prec* enregistre les pointeurs : $prec(i) = j$ s'il y a un pointeur de la case numérotée $\sigma(j)$ vers la case numérotée $\sigma(i)$ dans la réussite. Enfin *suite* contient une sous-suite croissante maximale construite à l'aide des pointeurs à partir de l'élément en bas à droite à la fin de la réussite. La notation @ est la concaténation de listes et :: dénote l'ajout d'un élément en tête de liste, comme en Caml.

SSCM (n, σ)

$col \leftarrow \emptyset$; $largeur \leftarrow 0$; $prec \leftarrow \emptyset$; $suite \leftarrow \emptyset$
pour i **de** 1 **à** n **faire** $j \leftarrow 1$
    tant que $j \leq largeur$ **et** $\sigma(i) > col[j](1)$ **faire** $j \leftarrow j+1$
    $col[j] \leftarrow \sigma(i) :: col[j]$
    si $j = largeur + 1$ **alors** $largeur \leftarrow largeur + 1$
    si $j > 1$ **alors** $prec(i) \leftarrow \sigma^{-1}(col[j-1](1))$
$suite \leftarrow [\sigma^{-1}(col[largeur](1))]$
pour k **de** *largeur* **à** 2 **par pas de** -1 **faire**
    $x \leftarrow suite(1)$; $suite \leftarrow prec(x) :: suite$
retourner *suite*

Commentons cet algorithme. La boucle **tant que** de la ligne 3 détermine j tel que $col[j]$ soit la première colonne où l'on peut insérer $\sigma(i)$ (si $j > largeur$, il s'agit d'une nouvelle colonne). En ligne 4, on insère $\sigma(i)$ en tête de cette colonne. En ligne 5, on teste si l'ajout de $\sigma(i)$ a créé une nouvelle colonne, auquel cas *largeur* est mis à jour. En ligne 6, on détermine $prec(i)$ si i n'a pas été inséré en colonne 1. À la fin de l'exécution de la boucle 2-6, *col* contient le résultat de la réussite et *prec* les pointeurs. En ligne 8, on se positionne sur la case en bas à droite de la réussite. La boucle 8-9 construit la sous-suite croissante maximale en remontant le long des pointeurs.

Si l'on n'a pas réussi à trouver l'astuce des pointeurs de la question 1.4, on peut proposer un algorithme plus naïf, par exemple un algorithme récursif. Il y a plusieurs variantes, que l'on n'énumérera pas ici.

Une autre variante qui ne nécessitait pas d'avoir compris l'astuce des pointeurs, consiste à trouver, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, une sous-suite croissante $\ell_i = i_1, \ldots, i_k$ telle que $\sigma(i_k) = i$, et maximale avec cette propriété. On peut le faire par programmation dynamique, en remarquant que si $i_1, \ldots, i_k$ est une sous-suite croissante maximale telle que $\sigma(i_k) = i$ avec $k \geq 2$, et si j est la valeur $\sigma(i_{k-1})$, alors $i_1, \ldots, i_{k-1}$ est une sous-suite croissante maximale telle que $\sigma(i_{k-1}) = j$. On peut donc calculer ℓ_i comme étant la plus longue de toutes les suites parmi :
- $[\sigma^{-1}(i)]$ (le cas $k = 1$),
- $\ell_j @ [\sigma^{-1}(i)]$ où j parcourt les indices tels que $1 \leq j \leq i-1$ et tels que le dernier élément de ℓ_j est inférieur à $\sigma^{-1}(i)$.

Une fois rempli le tableau des ℓ_i, $1 \leq i \leq n$, il suffit de le reparcourir pour retourner un ℓ_i de longueur maximale. On peut encore optimiser, en remarquant que l'on n'a besoin de stocker pour tout i que la longueur de ℓ_i (dans un tableau $long\ell$) et la valeur j telle que $\ell_i = \ell_j @ [\sigma^{-1}(i)]$ (dans le deuxième cas ci-dessus). Cette valeur j sera stockée dans un tableau *precval*, et on conviendra que $precval(i)$ vaut 0 si j n'existe pas (autrement dit si ℓ_i est la liste à un élément $[\sigma^{-1}(i)]$). À noter que le dernier élément de ℓ_i est nécessairement $\sigma^{-1}(i)$. En même temps, on va stocker dans *longmax* la longueur de la plus grande sous-suite croissante ℓ_i obtenue, et dans *imax* le i correspondant. On obtient :

SSCM-BIS (n, σ)

$longmax \leftarrow 0$; $imax \leftarrow 0$; $suite \leftarrow \emptyset$;
pour i **de** 1 **à** n **faire**
  $long\ell(i) \leftarrow 1$; $precval(i) \leftarrow 0$
  pour j **de** 1 à $i-1$ **faire**
    si $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$ **et** $long\ell(j) + 1 > long\ell(i)$
      alors $long\ell(i) \leftarrow long\ell(j) + 1$; $precval(i) \leftarrow j$
  si $long\ell(i) > longmax$
    alors $longmax \leftarrow long\ell(i)$; $imax \leftarrow i$
$suite \leftarrow [\sigma^{-1}(imax)]$;
pour k **de** $longmax$ **à** 2 **par pas de** -1 **faire**
  $x \leftarrow suite(1)$; $suite \leftarrow \sigma^{-1}(precval(\sigma(x))) :: suite$
retourner *suite*

Cet algorithme a la même complexité dans le pire des cas que celui de la réussite (quadratique en n). Il est par contre moins efficace que celui de la réussite dès que $L(\sigma)$ est significativement plus petit que n.

Remarque. L'algorithme de programmation dynamique a été trouvé par quelques candidats. Observons que la variante apparemment proche consistant à écrire un algorithme glouton qui cherche à étendre une suite croissante par le premier indice possible est incorrect, comme le montre l'exemple de l'énoncé : 7, 2, 3, 6, 1, 5, 4. Un algorithme glouton partant de la gauche retournerait [7] et partant de la droite $[1, 4]$. Différentes versions, plus ou moins subtiles, de cette erreur se sont retrouvées dans les copies des candidats. $\square$

Question 1.6. Soit σ une permutation quelconque. Appelons *inversion* de σ tout couple i, j tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Supposons que σ possède au moins une inversion, alors σ possède une inversion de la forme $i, i+1$. En effet, choisissons une inversion i, j telle que i est maximal. Alors $i, i+1$ est encore une inversion, sinon $i+1, j$ serait une autre inversion, contredisant la maximalité de i.

Supposons que σ possède une inversion $i, i+1$. Posons $g = (i, i+1)$, et montrons que $\mathrm{Inv}(\sigma g) = \mathrm{Inv}(\sigma) - 1$. En effet, définissons l'application G qui à toute inversion k, ℓ de σ associe le couple $g^{-1}(k), g^{-1}(\ell)$. Ce dernier est une inversion de σg si et seulement si $g^{-1}(k) < g^{-1}(\ell)$, puisque $\sigma g(g^{-1}(k)) > \sigma g(g^{-1}(\ell))$. Les seuls cas où $g^{-1}(k) < g^{-1}(\ell)$ est faux sont lorsque $k = i$ et $g^{-1}(\ell) \leq i+1$ (c'est-à-dire $\ell \leq i+1$, ce qui implique $\ell = i+1$, puisque $k < \ell$), et lorsque $\ell = i+1$ et $g^{-1}(k) \geq i$ (c'est-à-dire $k = i$, puisque $k < \ell$) ; autrement dit, le seul cas où $g^{-1}(k), g^{-1}(\ell)$ n'est pas une inversion de σg est le cas $k, \ell = i, i+1$. D'autre part, pour toute inversion k', ℓ' de σg, $G^{-1}(k', \ell') = g(k'), g(\ell')$ est une inversion de σ, car $i, i+1$ n'est pas une inversion de σg (donc $k', \ell' \neq i, i+1$) et en utilisant des arguments similaires. L'application G étant bijective, on en conclut que : (a) $\mathrm{Inv}(\sigma(i, i+1)) = \mathrm{Inv}(\sigma) - 1$, dès que $i, i+1$ est une inversion de σ.

Remplaçant σ par $\sigma(i, i+1)$ dans la formule ci-dessus, on en conclut immédiatement que : (b) $\mathrm{Inv}(\sigma) = \mathrm{Inv}(\sigma(i, i+1)) - 1$ dès que $i, i+1$ n'est pas une inversion de σ.

En particulier : (c) $\mathrm{Inv}(\sigma) - \mathrm{Inv}(\sigma(i, i+1)) \in \{-1, +1\}$.

Il est évident que : (d) $K(\sigma(i, i+1)) \leq K(\sigma) + 1$. En remplaçant σ par $\sigma(i, i+1)$, on en déduit immédiatement : (e) $K(\sigma(i, i+1)) \geq K(\sigma) - 1$.

Si $K(\sigma) = k$, alors σ s'écrit $eg_1 \ldots g_k$, où tous les g_i sont dans $\mathcal{K}$. Donc $\mathrm{Inv}(\sigma) \leq k$ en utilisant (c), autrement dit $\mathrm{Inv}(\sigma) \leq K(\sigma)$.

Montrons maintenant par récurrence sur $\mathrm{Inv}(\sigma)$ la réciproque, à savoir que $\mathrm{Inv}(\sigma) \geq K(\sigma)$: si $\mathrm{Inv}(\sigma) = 0$, clairement $\sigma = e$, donc $K(\sigma) = 0$. Sinon, σ a une inversion. On a vu qu'elle a alors une inversion de la forme $i, i+1$. Alors $\mathrm{Inv}(\sigma) = \mathrm{Inv}(\sigma(i, i+1)) + 1$ (par (a)) $\geq K(\sigma(i, i+1)) + 1$ (par hypothèse de récurrence) $\geq K(\sigma)$ (par (e)).

$\square$

Question 1.7. On montre les invariants suivants. En premier : (a) en lignes 1, 2, 3, 4, on a $\sigma(j) = j$ pour tout $j > i$; et : (b) en fin du corps de boucle (après l'affectation inv $\leftarrow$ inv$+i-k$), $\sigma(j) = j$ pour tout $j \geq i$. En effet (a) est vrai pour $i = n$, de plus (b) au tour i entraîne (a) au tour suivant $i-1$. Il reste à démontrer que l'effet des lignes 4 et 5 est de modifier σ, en supposant que $\sigma(j) = j$ pour tout $j > i$, en une permutation σ' telle que $\sigma'(j) = j$ pour tout $j \geq i$. Soit $k = \sigma^{-1}(i)$. Si $k \geq i$, alors le programme calcule $\sigma' = \sigma$; mais dans ce cas σ restreinte à $[1, i]$ est une permutation, puisque (a) est vraie, et $k = \sigma^{-1}(i) \geq i$, donc $\sigma^{-1}(i) = i$, donc $\sigma(i) = i$ et donc $\sigma'(j) = j$ pour tout $j \geq i$. Si en revanche $k < i$, alors le programme calcule $\sigma' = \sigma(k, k+1) \ldots (i-1, i)$: pour tout $j > i$, $\sigma'(j) = \sigma(j) = j$, et $\sigma'(i) = \sigma(k, k+1) \ldots (i-2, i-1)(i-1) = \sigma(k) = \sigma(\sigma^{-1}(i)) = i$; donc $\sigma'(j) = j$ pour tout

$j \geq i$.

Grâce aux invariants (a) et (b), on déduit que $\sigma = e$ en ligne 6. En effet, en ligne 6, $\sigma(j) = j$ pour tout j sauf peut-être 1 ; mais σ étant bijective, nécessairement $\sigma(1) = 1$, donc $\sigma = e$.

On remarque ensuite que si $k < i$ en ligne 4, alors σ possède au moins $i - k$ inversions : comme σ restreinte à $[1, i]$ est une permutation par (a), tous les couples k, j avec $k < j \leq i$ sont en effet des inversions, et il y en a $i - k$. De plus, si l'on pose $\sigma' = \sigma c_{ki}$, alors toutes ces inversions disparaissent de σ', et il est clair que $\mathrm{Inv}(\sigma') = \mathrm{Inv}(\sigma) - (i - k)$. Notons σ_0 la valeur de σ en entrée de $\mathcal{K}$-MÉLANGE. On en conclut que $\mathrm{Inv}(\sigma_0) = \mathrm{Inv}(e) + \mathrm{inv} = \mathrm{inv}$ pour la valeur de inv retournée en ligne 6. Donc $\mathcal{K}$-MÉLANGE calcule bien $K(\sigma_0) = \mathrm{Inv}(\sigma_0)$.

En revanche, si l'on remplace la ligne 5 par la ligne 5', contrairement à l'intuition, le nouvel algorithme ne retourne pas $U(\sigma)$. Un exemple simple suffit à le montrer. Soit σ la permutation $2, 3, 1$, c'est-à-dire c_{13}. Clairement $U(\sigma) = 1$, mais l'algorithme calcule comme ceci. D'abord, il pose $i = n = 3$, $k = \sigma^{-1}(3) = 2$. Comme $k < i$, l'algorithme pose $\sigma \leftarrow \sigma c_{23}$, c'est-à-dire transforme σ en la permutation $2, 1, 3$, et fait passer inv à 1. Maintenant i passe à 2, $k = \sigma^{-1}(2) = 1$. Comme $k < i$, l'algorithme pose $\sigma \leftarrow \sigma c_{12}$, c'est-à-dire met σ à $1, 2, 3$, et fait passer inv à 2. Le nouvel algorithme retourne donc 2, alors que $U(\sigma) = 1$. En fait, il a calculé c_{13} comme la composition $(c_{23}c_{12})^{-1} = c_{21}c_{32}$, ce qui n'est pas optimal. En général, l'algorithme modifié ne permet de calculer σ que comme des produits de c_{ki} avec $k < i$, ce qui n'épuise pas toutes les possibilités d'écriture de σ comme produits de c_{ki}, $k \neq i$.

On observera que l'exemple $\sigma = 7, 2, 3, 6, 1, 5, 4$ de l'énoncé fournissait également un contre-exemple.

Remarque. Il semble irréaliste de chercher à démontrer directement que $\mathcal{K}$-MÉLANGE calcule $K(\sigma)$, sans passer par $\mathrm{Inv}(\sigma)$ et le résultat de la question 1.6. Observons que l'algorithme correspond au mécanisme du tri par bulles. Pour la deuxième partie de la question, il est intéressant de noter que près de la moitié des candidats l'ayant abordée répondent "oui".

□

Question 2.1. Considérons les partitions λ de n telles que $\lambda_1 \leq N$, où N, $1 \leq N \leq n$ est une borne donnée. Si $n = 1$, alors il y a exactement une telle partition de n : $k = 1$, $\lambda_1 = 1$. Sinon, les partitions cherchées sont telles que $1 \leq \lambda_1 \leq N$, de plus pour chaque choix de λ_1, $(\lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ est une partition de $n - \lambda_1$ dont le premier élément est inférieur ou égal à λ_1 (car $\lambda_2 \leq \lambda_1$ par définition) ainsi qu'à $n - \lambda_1$. On écrit donc :

```
NB-partitions (n, N)
    si n = 1 alors retourner 1
    sinon var x
        x ← 0
        pour i de 1 à N faire
            x ← x + NB-PARTITIONS (n − i, min(i, n − i))
        retourner x
```

Ici i énumère les valeurs possibles de λ_1. La réponse demandée est alors une procédure prenant $n \geq 1$ en entrée et retournant NB-PARTITIONS (n, n).

Remarque. Ici on a vu la plus grande diversité de récurrences fausses, dont certaines mêmes affirmées péremptoirement sans aucune justification. Quelques rares candidats ont tenté, à défaut de calculer directement le nombre de partitions de n, de les énumérer explicitement puis de les compter. En règle générale, les algorithmes obtenus étaient non commentés et incompréhensibles. Une grande proportion de candidats a cherché à définir un algorithme récursif NB-PARTITIONS (n) directement, sans passer par un algorithme à deux arguments comme ci-dessus. C'était sans espoir. $\square$

Question 2.2. Pour montrer que la ligne du bas de $P(\sigma)$ est composée de $L(\sigma)$ cases, il suffit de montrer que la ligne du bas de $P(\sigma)$ est exactement la ligne du bas de la réussite jouée sur σ, par la question 1.4. C'est en fait relativement évident : si $\sigma(i)$ est plus grand que tous les numéros de la ligne du bas du tableau partiel associé à $\sigma(1), \dots, \sigma(i-1)$, alors INSERTION-LIGNE ajoute $\sigma(i)$ dans une nouvelle colonne à droite du tableau partiel courant, de même que la réussite ajoute $\sigma(i)$ dans une nouvelle colonne à droite de la réussite courante ; sinon, INSERTION-LIGNE commence par placer $\sigma(i)$ en bas de la colonne la plus à gauche qui contient un numéro plus grand que $\sigma(i)$, comme la réussite ; ensuite INSERTION-LIGNE ne touche plus qu'aux lignes plus hautes.

À noter que seules les lignes du bas coïncident entre la réussite et l'algorithme de la question 2.2. Si l'on part de la permutation $7, 2, 3, 6, 1, 5, 4$ dont la réussite est en figure 1 de l'énoncé, on aboutit au tableau à droite de la figure 3 de l'énoncé, dont en particulier la colonne de gauche n'a aucun rapport avec aucune colonne de la réussite.

Remarque. Un nombre étonnamment élevé de candidats n'a pas vu cet argument simple, et a cherché à raisonner directement sur les sous-suites croissantes maximales de σ. Ceci menait à une argumentation complexe et confuse. $\square$

Question 2.3. Écrivons $P(\sigma)$ sous la forme $\ell_{\sigma(n)} \circ \dots \circ \ell_{\sigma(1)}(\emptyset)$. Alors $P(\sigma)^t = c_{\sigma(n)} \circ \dots \circ c_{\sigma(1)}(\emptyset)$, puisque $\ell_k(T)^t = c_k(T^t)$ et $\emptyset^t = \emptyset$. Il est important de remarquer que : $(*)$ $c_k(\emptyset) = \ell_k(\emptyset)$ pour tout k ; les deux quantités sont en effet le tableau à une case contenant k. On a donc :

$$\begin{aligned} P(\sigma)^t &= c_{\sigma(n)} \circ \dots \circ c_{\sigma(2)} \circ c_{\sigma(1)}(\emptyset) \\ &= c_{\sigma(n)} \circ \dots \circ c_{\sigma(2)} \circ \ell_{\sigma(1)}(\emptyset) \quad \text{(par } (*)\text{)} \\ &= \ell_{\sigma(1)} \circ c_{\sigma(n)} \circ \dots \circ c_{\sigma(2)}(\emptyset) \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de commutation indiquée. En itérant le procédé, on obtient :

$$\begin{aligned} P(\sigma)^t &= c_{\sigma(n)} \circ \dots \circ c_{\sigma(2)} \circ c_{\sigma(1)}(\emptyset) \\ &= \ell_{\sigma(1)} \circ c_{\sigma(n)} \circ \dots \circ c_{\sigma(2)}(\emptyset) \\ &= \ell_{\sigma(1)} \circ \ell_{\sigma(2)} \circ c_{\sigma(n)} \circ \dots \circ c_{\sigma(3)}(\emptyset) \\ &= \dots \\ &= \ell_{\sigma(1)} \circ \ell_{\sigma(2)} \circ \dots \circ \ell_{\sigma(n)}(\emptyset) \end{aligned}$$

et la dernière ligne est $P(\overline{\sigma})$. Donc $P(\overline{\sigma}) = P(\sigma)^t$.

La plus grande longueur d'une sous-suite décroissante de σ est alors aussi la plus grande longueur d'une sous-suite croissante de $\overline{\sigma}$, et est donc le nombre de colonnes de $P(\overline{\sigma})$ par la question 2.2, donc le nombre de colonnes de $P(\sigma)^t$, donc le nombre de lignes de $P(\sigma)$. $\square$

Question 2.4. Soit σ une permutation sur $[1, n^2]$. D'après la question 1.3, $U(\sigma)+L(\sigma) = n^2$, et $U(\overline{\sigma}) + L(\overline{\sigma}) = n^2$. En utilisant les questions 2.2 et 2.3, $\min(U(\sigma), U(\overline{\sigma}))$ est donc n^2 moins le max de la largeur et de la hauteur de $P(\sigma)$. Or $P(\sigma)$ est un tableau de n^2 cases, qui a une largeur ou une hauteur d'au moins n ; sinon il serait inclus dans un carré de côté $n-1$, et ne pourrait contenir qu'au plus $(n-1)^2$ cases. Donc $\min(U(\sigma), U(\overline{\sigma})) \leq n^2 - n = n(n-1)$.

Soit σ la permutation $n^2-n+1, n^2-n+2, \ldots, n^2$, $n^2-2n+1, n^2-2n+2, \ldots, n^2-n$, $\ldots$, $n^2-kn+1, n^2-kn+2, \ldots, n^2-kn+n$, $\ldots$, $1, 2, \ldots, n$. Son tableau de Young $P(\sigma)$ est

n^2-n+1	n^2-n+2	$\ldots$	n^2
n^2-2n+1	n^2-2n+2	$\ldots$	n^2-n
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n^2-kn+1	n^2-kn+2	$\ldots$	n^2-kn+n
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1	2	$\ldots$	n

Donc $U(\sigma) = U(\overline{\sigma}) = n$. $\square$

Question 2.5. Pour démontrer que l'algorithme RS de Robinson-Schensted définit une bijection entre $\mathfrak{S}_n$ et les couples (P, Q) de tableaux de Young de même forme, et de taille n, il suffit de définir explicitement l'algorithme inverse de RS. L'algorithme ci-dessous prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple de tableaux de Young (P, Q) tels que $\mathrm{sh}(P) = \mathrm{sh}(Q) = \lambda \vdash n$.

RS-INVERSE $(n, (P, Q))$
1. $\sigma \leftarrow \emptyset$
2. **tant que** sh(Q) $\neq \Theta$ **faire**
3. soit (j, α) tel que $Q(j, \alpha) = \max\{Q(u, v), (u, v) \in \mathrm{sh}(Q)\}$
4. $Q(j, \alpha) \leftarrow 0$, $x \leftarrow P(j, \alpha)$, $P(j, \alpha) \leftarrow 0$
5. **tant que** $\alpha \geq 2$ **faire**
6. $\alpha \leftarrow \alpha - 1$, $y \leftarrow \max\{k | k \in \mathrm{num}(P(\cdot, \alpha)), k < x\}$
7. j tel que $P(j, \alpha) = y$, $P(j, \alpha) \leftarrow x$, $x \leftarrow y$
8. $\sigma \leftarrow x :: \sigma$
9. **retourner** σ

Justifions cet algorithme. Commençons par inverser INSERTION-LIGNE, en utilisant Q. Il est facile de retrouver la dernière case rajoutée par INSERTION-LIGNE à P : c'est celle dont la position (j, α) dans P est telle que $Q(j, \alpha)$ est la case maximale dans Q. Il s'agit là de la ligne 3 de l'algorithme RS-INVERSE. Après exécution de la ligne 4, P et Q restent des tableaux partiels. C'est évident pour Q. Pour P, c'est vrai car le dernier 0 est écrit dans la case la plus à droite d'une ligne ; parce que Q est lui-même un tableau partiel, donc que ses lignes sont en ordre croissant, et que l'on a choisi $Q(j, \alpha)$ maximal. Ensuite les éléments y et j des lignes 6 et 7 sont bien définis : l'ensemble $\{k | k \in \mathrm{num}(P(\cdot, \alpha)), k \leq x\}$ est non vide : il contient au moins la valeur courante de j, car les colonnes sont en ordre croissant de bas en haut, puisque P est un tableau partiel. L'affectation $P(j, \alpha) \leftarrow x$ en ligne 7 maintient que $P(\cdot, \alpha)$ est en ordre croissant, par la maximalité du choix de y sur cette ligne. Ceci maintient aussi la colonne $P(j, \cdot)$ en ordre croissant, car $y < x$. La liste $\sigma = x_1, \ldots, x_n$ retournée par l'algorithme est une permutation car les x_i sont des éléments extraits de P, donc deux à deux distincts.

Posons $\mathrm{RS}^{-1}(P, Q) = \sigma$. La fonction RS^{-1} est totale : nous avons argumenté de la bonne définition des constructions en cours de définition de la procédure. D'autre part, RS^{-1} a été conçue de sorte que $\mathrm{RS}^{-1}(\mathrm{RS}(\sigma)) = \sigma$. Il est en fait clair que $\mathrm{RS}(\mathrm{RS}^{-1}(P,Q)) = (P,Q)$. Donc RS est une bijection.

On en déduit d'une part que le cardinal de $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n | L(\sigma) = k\}$ est exactement le nombre de couples (P,Q) de tableaux de Young de même forme λ, de taille n, et de k colonnes — c'est-à-dire tels que $\lambda \vdash n$ et $\lambda_1 = k$. Pour chaque forme λ, il y a d_λ^2 couples de tableaux de Young de forme λ. Donc

$$\mathrm{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n | L(\sigma) = k\} = \sum_{\lambda \vdash n, \lambda_1 = k} d_\lambda^2 .$$

En sommant sur toutes les valeurs possibles de k, on obtient $n! = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$. □

Question 2.6. Les involutions σ, c'est-à-dire les permutations σ telles que $\sigma^2 = e$, c'est-à-dire encore les permutations σ telles que $\sigma^{-1} = \sigma$, sont d'après le théorème de Schützenberger les permutations σ telles que $P(\sigma) = Q(\sigma)$. En effet, si $\sigma^{-1} = \sigma$, alors $P(\sigma) = Q(\sigma^{-1}) = Q(\sigma)$, et réciproquement si $P(\sigma) = Q(\sigma)$, alors $\mathrm{RS}(\sigma^{-1}) = (P(\sigma^{-1}), Q(\sigma^{-1})) = (Q(\sigma), P(\sigma)) = \mathrm{RS}(\sigma)$; comme RS est bijectif, $\sigma = \sigma^{-1}$.

On en déduit que le cardinal des involutions de $\mathfrak{S}_n$ est exactement le nombre de tableaux de Young de forme λ, de taille n. Donc

$$\mathrm{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma^2 = e\} = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda .$$

Comptons maintenant les involutions de $\mathfrak{S}_n$. Une telle involution σ est caractérisée, d'une part par l'ensemble des indices i tels que $\sigma(i) = i$, d'autre part par l'ensemble des couples d'indices distincts $i < j$ tels que $\sigma(i) = j$ et $\sigma(j) = i$. Ces couples sont d'autres part disjoints deux à deux, et σ est la composition des k transpositions (i,j). Il y a au plus $[n/2]$ tels couples dans une involution σ. Pour tout k entre 0 et $[n/2]$, il y a autant d'involutions qui sont composition de k transpositions disjointes deux à deux qu'il y a de tels k-uplets $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_k)$ de couples, modulo permutation des ces k couples.

Commençons par compter les k-uplets de tels couples. On a $C_n^2 = n(n-1)/2$ choix pour la paire (i_1, j_1) parmi n éléments, $C_{n-2}^2 = (n-2)(n-3)/2$ choix pour la paire (i_2, j_2) parmi les $n-2$ restants, …, $C_{n-2k+2}^2 = (n-2k+2)(n-2k+1)/2$ choix pour la dernière paire. Donc on a

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdots \frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2} = \frac{n!}{2^k (n-2k)!}$$

k-uplets de tels couples. Modulo les $k!$ permutations de ces k couples, on a donc

$$\frac{n!}{2^k k! (n-2k)!}$$

involutions de $\mathfrak{S}_n$ qui sont compositions de k transpositions disjointes. Comme k peut varier de 0 à $[n/2]$, on en conclut que

$$\sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda = \mathrm{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma^2 = e\} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!} .$$

□

Question 3.1. Soit Ψ une représentation de dimension 1 de $\mathfrak{S}_n$, $n \geq 2$. Alors Ψ est un morphisme de groupes multiplicatifs de $\mathfrak{S}_n$ vers $\mathbb{C}^*$.

Pour toute transposition $(i, i+1)$, on a $(i, i+1)^2 = e$, donc $\Psi(i, i+1)^2 = 1$. En particulier, $\Psi(i, i+1)$ vaut 1 ou -1. On remarque maintenant que $(i, i+1)(i+1, i+2) = c_{(i+2)i}$, et que $c_{(i+2)i}^3 = e$. Donc $\Psi(i, i+1)^3\Psi(i+1, i+2)^3 = 1$. Comme $\Psi(i, i+1)^2 = 1$, $\Psi(i, i+1)^3 = \Psi(i, i+1)$, et de même $\Psi(i+1, i+2)^3 = \Psi(i+1, i+2)$. Donc $\Psi(i, i+1)\Psi(i+1, i+2) = 1$, ce qui implique que $\Psi(i, i+1) = \Psi(i+1, i+2)$.

En résumé, pour tout i, $\Psi(i, i+1)$ doit valoir le même nombre, soit 1, soit -1. Si c'est 1, on obtient la représentation constante $\Psi(\sigma) = 1$. Si c'est -1, on obtient la représentation $\Psi(\sigma) = sign(\sigma)$, où $sign(\sigma)$ est la signature de σ. Ces deux représentations sont distinctes dès que $n \geq 2$.

Remarque. Voici une autre preuve possible. Soit (i, j) et (k, l) deux transpositions. Soit u une permutation telle que $u(k) = i$ et $u(l) = j$. Posons $\sigma = u^{-1}(i, j)u$. Clairement pour $x \neq k, l$, on a $\sigma(x) = x$. D'autre part on a $\sigma(k) = l$ et $\sigma(l) = k$. On a montré que $u^{-1}(i, j)u = (k, l)$. On en déduit que $\Psi(k, l) = \Psi(u)^{-1}\Psi(i, j)\Psi(u) = \Psi(i, j)$. □

Question 3.2. D'abord, on a

$$\begin{aligned}\langle u|v\rangle &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\Psi(\sigma)u|\Psi(\sigma)v) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \overline{(\Psi(\sigma)v|\Psi(\sigma)u)} = \overline{\langle v|u\rangle}\end{aligned}$$

On montre ensuite que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est une forme sesquilinéaire. Au vu de l'identité $\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$, il suffit de vérifier qu'elle est linéaire en son deuxième argument, ce qui est une conséquence de la linéarité de $\Psi(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et de la sesquilinéarité de $(\cdot|\cdot)$. Ensuite $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est une forme positive, car $\langle u|u\rangle = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\Psi(\sigma)u|\Psi(\sigma)u)$ est une somme de réels positifs, $(\cdot|\cdot)$ étant une forme positive. Finalement, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est définie positive : si $\langle u|u\rangle = 0$, alors pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $(\Psi(\sigma)u|\Psi(\sigma)u)$, donc $\Psi(\sigma)u = 0$. En particulier pour $\sigma = I$, $u = 0$.

Montrons que E s'écrit $\bigoplus_{i=1}^m E_i$ où les E_i sont des sous-espaces vectoriels stables par $\Psi(\sigma)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, tels que Ψ_{E_i} est irréductible. Ceci sera montré par récurrence sur la dimension $k \geq 1$ de E. Si $k = 1$, c'est évident : E est nécessairement irréductible, et $m = 1$, $E_1 = E$. Sinon, soit Ψ est irréductible et $m = 1$, $E_1 = E$ répond à la question, soit Ψ est réductible, et il existe un sous-espace vectoriel E_1 non trivial stable par $\Psi(\sigma)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Choisissons E_1 de dimension minimale supérieure ou égale à 1, alors Ψ_{E_1} est irréductible, et posons $E_1^\perp$ l'orthogonal de E_1 dans E pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$. (Le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ étant quelconque.)

Montrons que $E_1^\perp$ est nécessairement stable par $\Psi(\sigma)$ pour tout σ. En effet, soit $u \in E_1^\perp$. Pour tout $v \in E_1$,

$$\begin{aligned}\langle\Psi(\sigma)u|v\rangle &= \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n} (\Psi(\sigma')\Psi(\sigma)u|\Psi(\sigma')v) \\ &= \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n} (\Psi(\sigma'\sigma)u|\Psi(\sigma')v) \\ &= \sum_{\sigma''\in\mathfrak{S}_n} (\Psi(\sigma'')u|\Psi(\sigma''\sigma^{-1})v) \quad (\text{où } \sigma'' = \sigma'\sigma) \\ &= \sum_{\sigma''\in\mathfrak{S}_n} (\Psi(\sigma'')u|\Psi(\sigma'')\Psi(\sigma^{-1})v) = \langle u|\Psi(\sigma^{-1})v\rangle = 0\end{aligned}$$

puisque $v \in E_1$, E_1 est stable par $\Psi(\sigma^{-1})$, et $E_1^\perp$ est orthogonal à E_1. Comme $\langle \Psi(\sigma)u | v\rangle = 0$ pour tout $v \in E$, $\Psi(\sigma)u \in E_1^\perp$.

Comme E est de dimension au moins 1, $E_1^\perp$ est de dimension strictement inférieure à celle de E. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence, conclure que $E_1^\perp$ est une somme directe $\bigoplus_{i=2}^m E_i$, et donc que $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ où les E_i sont stables par tous les $\Psi(\sigma)$ et tels que Ψ_{E_i} est irréductible. $\square$

Question 3.3. Soit H l'hyperplan des $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 0$. Pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$, $S(\sigma)x$ est le vecteur $(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$. En effet, $(S(\sigma)x)_i = \sum_{j=1}^n S(\sigma)_{ij} x_j = \sum_{j/i=\sigma(j)} x_j = x_{\sigma^{-1}(i)}$. Si $x \in H$, alors $\sum_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i)} = \sum_{j=1}^n x_j = 0$. Donc H est stable par $S(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Comme H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ qui est non trivial dès que $n \geq 2$, S est donc réductible.

Soit maintenant $x = (x_1, \dots, x_n) \in H$, avec $\forall i \neq j,\ x_i \neq x_j$. Par la première partie de la question, $\sum_\sigma \mathbb{C} S(\sigma)x \subseteq H$. Pour montrer l'égalité, on va exhiber une famille libre de $\sum_\sigma \mathbb{C} S(\sigma)x$ de cardinal $n-1$. On remarque que pour tout $i \neq 1$, on a

$$x - S(1,i)x = (x_1 - x_i, 0, \dots, 0, x_i - x_1, 0, \dots, 0)\,,$$

où le terme $x_i - x_1$ est en position i. Par hypothèse, $x_i - x_1 \neq 0$. Posons $u_i = (x_i - x_1)^{-1}(x - S(1,i)x) = (-1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. On vient de montrer que $(u_i)_i$ est une famille de $n-1$ vecteurs de $\sum_\sigma \mathbb{C} S(\sigma)x$. Par ailleurs, il est immédiat que $(u_i)_i$ est une famille libre.

Il ne reste plus qu'à montrer que S_H est irréductible. Supposons au contraire que S_H est réductible, et soit F un sous-espace vectoriel non trivial de H stable par tous les $S(\sigma)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Pour tout $x \in F$, si on avait $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$, alors $\sum_\sigma \mathbb{C} S(\sigma)x = H$; mais comme F est stable, $S(\sigma)x \in F$ pour tout σ, donc $\sum_\sigma \mathbb{C} S(\sigma)x \in F$, ce qui impliquerait $F = H$, ce qui est absurde. Donc tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ de F est tel que $x_i = x_j$ pour au moins un couple d'indices $i \neq j$. Soit H_{ij} l'hyperplan des x tels que $x_i = x_j$. On vient donc de montrer que $F \subseteq \bigcup_{i \neq j} H_{ij}$.

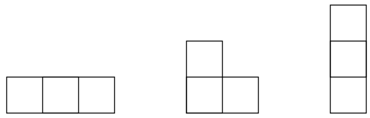
Or si un espace vectoriel F est inclus dans une union de deux espaces vectoriels F_1 et F_2, il est nécessairement inclus dans l'un d'entre eux. En effet, supposons le contraire, et soient $x_1, x_2 \in F$ tels que $x_1 \in F_1 \setminus F_2$ et $x_2 \in F_2 \setminus F_1$. Alors $x_1 + x_2 \in F$, mais $x_1 + x_2 \notin F_1$, sinon $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1$ serait dans F_1, et $x_1 + x_2 \notin F_2$, sinon $x_1 = (x_1 + x_2) - x_2$ serait dans F_2. On a donc trouvé un élément $x_1 + x_2$ de F qui n'est ni dans F_1 ni dans F_2, contredisant l'inclusion $F \subseteq F_1 \cup F_2$. On en déduit que, comme $F \subseteq \bigcup_{i \neq j} H_{ij}$, il existe un couple $i \neq j$ tel que $F \subseteq H_{ij}$.

Comme F est stable par tous les $S(\sigma)$, il est aussi stable par tous les $S(\sigma' \sigma {\sigma'}^{-1})$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, pour n'importe quel $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$ fixé. Mais $S(\sigma' \sigma {\sigma'}^{-1})$ est exactement la représentation standard de σ dans $\mathbb{C}^n$, une fois le changement de base effectué en appliquant la transformation linéaire inversible $S(\sigma')$. On en conclut que F est inclus dans l'hyperplan formé des points qui ont même i-ième et j-ième coordonnée dans la nouvelle base, c'est-à-dire dans l'hyperplan $H_{\sigma'^{-1}(i)\ \sigma'^{-1}(j)}$.

Comme σ' est arbitraire, F est inclus dans tous les hyperplans H_{ij}, $i \neq j$. Cette intersection est l'ensemble des vecteurs x tels que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Comme F est inclus dans H, on en déduit que $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Donc F est de dimension 0 ce qui contredit le fait que F est non trivial. On a ainsi démontré que S_H est nécessairement irréductible.

$\square$

Question 3.4. Les formes λ telles que $\lambda \vdash 3$ sont



(3) (2, 1) (1, 1, 1)

On a de plus $d_{(3)} = d_{(1,1,1)} = 1$, ce qui mène à deux représentations irréductibles de dimension 1. On les connaît : ce sont les deux représentations de la question 3.1, qui sont irréductibles car de dimension 1.

Il reste à considérer la forme $(2,1)$. Or tout tableau de Young ayant cette forme a un 1 dans la case en bas à gauche ; il y a 2 choix pour la case en bas à droite, à savoir 2 ou 3, ce qui fixe le choix pour la case restante. Donc $d_{(2,1)} = 2$. On en déduit qu'il existe une représentation irréductible de dimension 2 de $\mathfrak{S}_3$. D'après la question 3.3, il ne peut s'agir que de S_H.

Soit la base $e_1 = (1,-1,0), e_2 = (1,0,-1)$ de H. On veut déterminer les matrices de S_H dans cette base, il suffit de calculer $S_H(\sigma)(e_i), i = 1,2$, en utilisant la formule $S_H(\sigma)x = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$. Par example pour $\sigma = (1,2)$, on a

$$S_H(1,2)e_1 = (-1,1,0) = -e_1, \quad S_H(1,2)e_2 = (0,1,-1) = -e_1 + e_2\,.$$

D'où la matrice

$$S_H(1,2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De la même façon, on obtient

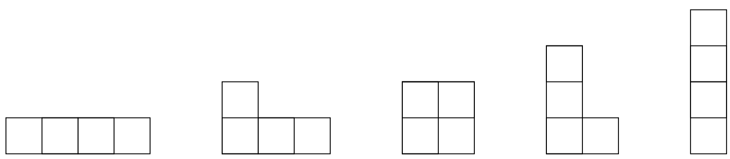
$$S_H(2,3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puis on obtient les matrices des autres permutations σ, soit directement, soit en décomposant σ suivant $(1,2)$ et $(2,3)$. On a

$$S_H(e) = I,\ S_H(1,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ S_H(c_{13}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ S_H(c_{31}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pour $n \geq 2$, la partition $(2,1,\ldots,1) \vdash n$ possède $n-1$ tableaux de Young. En effet, on doit placer 1 dans la case en bas à gauche, puis il reste $n-1$ choix pour l'entier $i \geq 2$ à placer dans la case juste à droite, ce qui détermine de façon unique les cases restantes, qui forment la suite 2, 3, …, n, de laquelle on a retiré i. On remarque que le transposé λ^t d'un diagramme de Ferrers est tel que $d_{\lambda^t} = d_\lambda$. Il s'ensuit que la partition $(n-1,1)$ a aussi $n-1$ tableaux de Young.

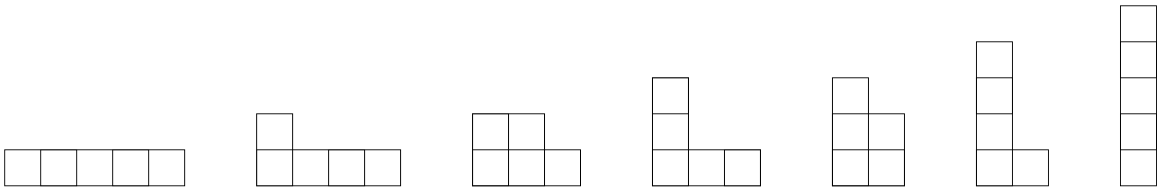
Traitons des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$. Les formes λ telles que $\lambda \vdash 4$ sont



(4) (3, 1) (2, 2) (2, 1, 1) (1, 1, 1, 1)

À part les 2 représentations irréductibles de dimension 1 ($d_{(4)} = d_{(1,1,1,1)} = 1$), on a $d_{(3,1)} = d_{(2,1,1)} = 4-1 = 3$, donc on a 2 représentations irréductibles de dimension 3. Finalement, par la question 2.5, on a $d^2_{(2,2)} + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 = 4!$, soit $d^2_{(2,2)} = 24 - 20 = 4$, donc $d_{(2,2)} = 2$, de sorte qu'on a aussi une représentation irréductible de dimension 2.

Traitons finalement des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_5$. Les formes λ telles que $\lambda \vdash 5$ sont



(5) (4, 1) (3, 2) (3, 1, 1) (2, 2, 1) (2, 1, 1, 1) (1, 1, 1, 1, 1)

On a $d_{(5)} = d_{(1,1,1,1,1)} = 1$, $d_{(4,1)} = d_{(2,1,1,1)} = 5 - 1 = 4$. Calculons $d_{(3,1,1)}$: on doit placer 1 dans la case en bas à gauche, puis on a $C_4^2 = 6$ choix pour les deux autres cases de la ligne du bas, enfin les cases restantes sont uniquement déterminées une fois ce dernier choix fait. Donc $d_{(3,1,1)} = 6$. En utilisant la question 2.5, et comme $d_{(3,2)} = d_{(2,2,1)}$, on a $1^2 + 4^2 + d^2_{(3,2)} + 6^2 + d^2_{(3,2)} + 4^2 + 1^2 = 5!$, donc $d^2_{(3,2)} = (120 - 70)/2 = 25$, donc $d_{(3,2)} = d_{(2,2,1)} = 5$. On a donc 2 représentations irréductibles de dimension 1, 2 de dimension 4, 2 de dimension 5, et 1 de dimension 6. $\square$

Bilan de l'épreuve

Cette épreuve s'est avérée très sélective. Traiter tout le sujet dans le temps imparti n'était sans doute pas réalisable. Par contre, le sujet permettait plusieurs parcours, avec notamment une troisième partie indépendante à l'exception de la dernière question. Les tous meilleurs arrivent à traiter plus des 2/3 du sujet. À l'inverse, beaucoup sont incapables de s'abstraire du formalisme et ne dépassent pas la question 1.3.

À titre indicatif, voici une évaluation de la proportion de candidats ayant répondu correctement aux premières questions :

Question	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**
%	98	70	10	10	10	5	5	20	10	5	10

Dans la partie 1, on avait volontairement séparé les questions mathématiques (1.3, 1.4, 1.6) et les questions algorithmiques (1.5, 1.7). De fait, les questions 1.4-1.5 et 1.6-1.7 fonctionnaient de façon couplée. En 1.4 (resp. 1.6), il s'agissait de démontrer une propriété et en 1.5 (resp. 1.7) d'écrire (resp. d'analyser) l'algorithme correspondant. Cette approche s'est avérée très instructive et sélective. Ainsi de nombreux candidats ont su répondre à 1.4 mais pas à 1.5 et réciproquement. Seuls les très bons candidats se sont montrés également à l'aise avec les deux types de question.

À l'opposé, les questions de la partie 2 étaient de nature *à la fois* mathématique et algorithmique. Le point culminant était la question 2.5 ou pour démontrer une bijection entre deux ensembles, il fallait calculer l'application inverse sous forme d'un algorithme. Peu de copies abordent le cœur de cette partie, néanmoins certains la traitent entièrement et remarquablement.

La dernière partie était de nature beaucoup plus traditionnelle, les candidats retrouvant le langage rassurant de l'algèbre linéaire ainsi que ses modes de raisonnement. De très nombreux candidats abordent cette partie. Cependant, fatigue accumulée ou relative difficulté des questions, très peu s'en sortent honorablement.

Notes bibliographiques

Les thèmes abordés dans le sujet sont du domaine de la *combinatoire algébrique*. En particulier, il existe une vaste et riche littérature sur la combinatoire du groupe symétrique, ses liens avec les représentations du groupe symétrique et avec les fonctions symétriques (ce dernier point n'était pas abordé dans le sujet). L'article fondateur introduisant l'algorithme de la partie 2 est [5]. Pour (beaucoup) plus de détails, on se réfèrera aux ouvrages [2, 4, 6]. Ces thèmes ont connu un très vif regain d'intérêt ces dernières années en raison de la découverte de liens inattendus avec la théorie des matrices aléatoires. Sur ces aspects, un article de synthèse très abordable est du à Aldous et Diaconis [1]. Par ailleurs, l'idée sous-tendant la partie 1, à savoir l'utilisation d'une version simplifiée de l'algorithme de la partie 2 sous la forme d'une réussite, est également inspirée de [1]. Un autre aspect intéressant est la connexion avec la théorie des files d'attente, voir par exemple [3].

Précisons qu'il existe une certaine variabilité dans la terminologie décrivant les objets du sujet. Ainsi, nos tableaux de Young sont souvent appelés *tableaux de Young standards* et les anglo-saxons les représentent la tête en bas ; l'algorithme de la partie 2 (ou ses extensions) est généralement accollé au nom de Schensted pour les permutations, à celui de Robinson-Schensted pour les mots et de Robinson-Schensted-Knuth pour les matrices à entrées dans $\mathbb{N}$. Le résultat de la question 2.5 est connu sous le nom de correspondance de (Robinson-)Schensted(-Knuth).

Références

[1] D. Aldous and P. Diaconis. Longest increasing subsequences : from patience sorting to the Baik-Deift-Johansson theorem. *Bull. Am. Math. Soc.*, 36(4) :413–432, 1999.

[2] W. Fulton. *Young tableaux : With applications to representation theory and geometry.* Cambridge Univ. Press, 1997.

[3] N. O'Connell. A path-transformation for random walks and the Robinson-Schensted correspondence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355 :3669–3697, 2003.

[4] B. Sagan. *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.* Number 203 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2001. 2nd edition.

[5] C. Schensted. Longest increasing and decreasing subsequences. *Can. J. Math.*, 13 :179–191, 1961.

[6] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics, Vol. 2.* Number 62 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999.