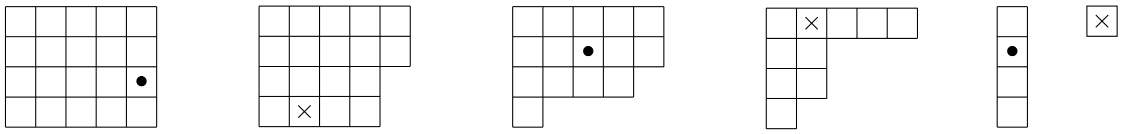
1 Résolution exhaustive

Exercice 1

Le jeu de Chomp est un jeu où deux joueurs se disputent une tablette de chocolat. Tour à tour, chaque joueur doit choisir un carré de chocolat parmi ceux restant sur la tablette et manger tous les carrés qui sont en dessous et à droite de ce carré. Le coin supérieur gauche de la tablette est empoisonné et le joueur qui le mange perd la partie.

Exemple

> Une partie de Chomp sur une tablette 5×4. Les points représentent les choix du joueur 1 et les croix les choix du joueur 2. Le joueur 2 perd la partie.
>
> 

1. Montrer que quelle que soit la tablette initiale, l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.
2. En dessinant le graphe des configurations, déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante sur une tablette 3×2.
3. Montrer que sur une tablette initiale rectangulaire contenant au moins deux carrés de chocolat, il existe toujours une stratégie gagnante pour le même joueur (à déterminer), quelle que soient les dimensions de la tablette.

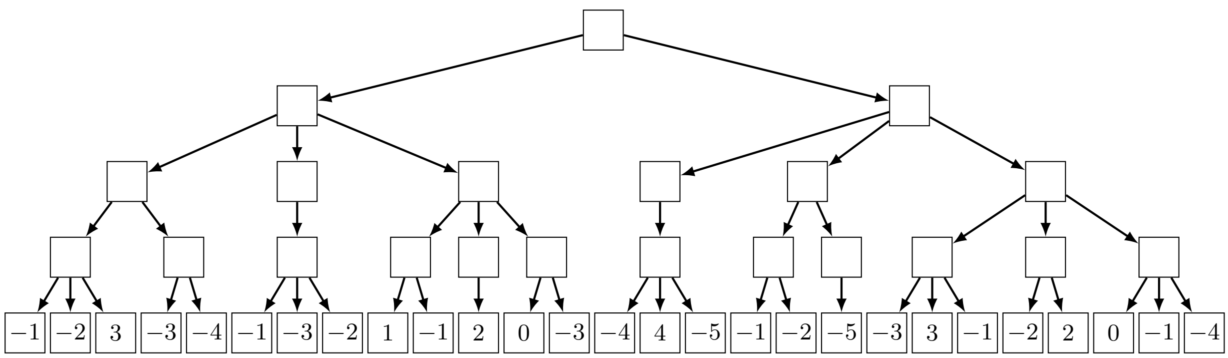
2 Min-Max

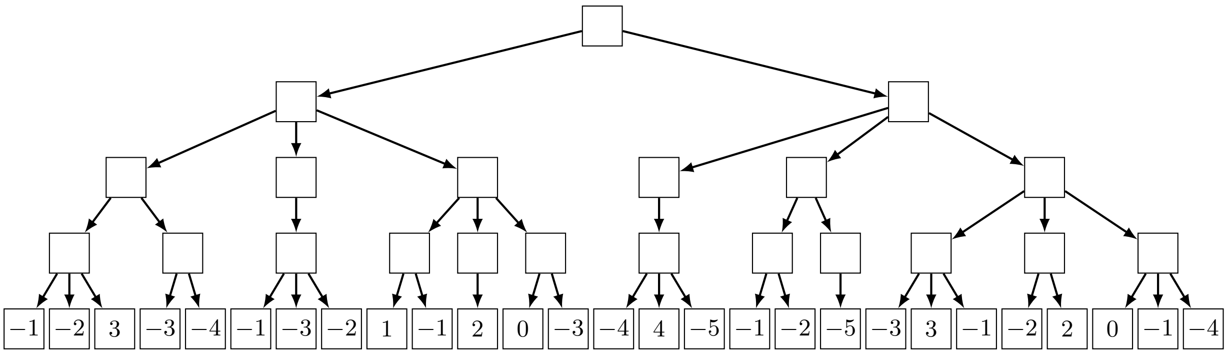
Exercice 2

Déterminer le score de la racine étant donnée les valeurs de l'heuristique aux feuilles de l'arbre suivant :

1. en supposant que la racine est un état du joueur 1 ;
2. en supposant que la racine est un état du joueur 2.

On appliquera l'élagage Alpha-Beta dans les deux cas.





3 Théorie de Sprague-Grundy

Exercice 3

Le jeu de Nim est un jeu à deux joueurs où chaque joueur doit à son tour retirer une ou plusieurs allumettes dans un parmi plusieurs tas d'allumettes. On distingue deux variantes de jeu :

– la variante **classique** où le gagnant est celui qui retire la dernière allumette ;

– la variante **misère** où celui qui retire la dernière allumette est le perdant.

Dans sa version la plus simple, il n'y a qu'un tas d'allumettes : n allumettes sont placées côte à côte et tour à tour, chaque joueur doit retirer une ou plusieurs allumettes. On note $*n$ un jeu de Nim avec un tas de n allumettes.

1. Montrer que quelle que soit la variante, il existe toujours un joueur qui possède une stratégie gagnante au jeu $*n$.
2. On suppose $n \geqslant 2$. Déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante dans le jeu $*n$, selon la variante choisie.

Lorsqu'on considère un jeu de Nim à plusieurs tas, on note de manière additive le jeu considéré. Par exemple, la figure 1 représente le jeu de Nim $*1 + *3 + *5 + *7$. À chaque tour de jeu, un joueur doit prendre une ou plusieurs allumettes sur une même ligne.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une stratégie gagnante facile à appliquer pour le joueur 2 dans la variante classique du jeu $*n + *n$.
4. Soit $1 \leqslant m < n$ deux entiers. Montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour le joueur 1 dans la variante classique du jeu $*m + *n$.
5. Déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante dans la variante misère pour $*1 + *n$, $n \geqslant 1$, $*2 + *2$ et $*2 + *n$, $n \geqslant 3$.
6. Que dire des questions 3 et 4 dans la variante misère ?

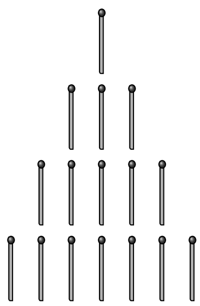


FIGURE 1 – Le jeu $*1 + *3 + *5 + *7$.

Exercice 4

Définition

Soit $a, b \in \mathbb{N}$, deux entiers dont les décompositions binaires sont $a = \sum_{i=0}^{p} a_i 2^i$ et $b = \sum_{i=0}^{q} b_i 2^i$. On définit le **ou exclusif bit à bit** $c = a \oplus b$ par $c = \sum_{i=0}^{\max(p,q)} c_i 2^i$ où $c_i = a_i + b_i \mod 2$ (avec la convention $a_i = 0$ si $i > p$ et $b_i = 0$ si $i > q$).

On considère un jeu de Nim en variante classique, de la forme $*x_1 + *x_2 + \ldots + *x_n$ où les $x_i \in \mathbb{N}$. On veut montrer le théorème de Sprague-Grundy :

Théorème

Il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur si et seulement si $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \neq 0$.

On note $*x_1 + *x_2 + \ldots + *x_n$ l'état du jeu avant le coup du premier joueur et $*y_1 + *y_2 + \ldots + *y_n$ l'état du jeu après le coup du premier joueur. On pose $x = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i$ et $y = \bigoplus_{i=1}^{n} y_i$.

1. Montrer que si le joueur 1 a enlevé des allumettes dans le tas d'indice k, alors $y = x \oplus x_k \oplus y_k$.
2. Montrer que si $x = 0$, alors $y \neq 0$ quel que soit le coup choisi.
3. Montrer que si $x \neq 0$, alors il existe un coup tel que $y = 0$.
4. Montrer le théorème de Sprague-Grundy.
5. Pour chacun des jeux suivantes, déterminer s'il est gagnant pour le premier joueur et décrire un premier coup gagnant le cas échéant.
   (a) $*1 + *3 + *5 + *7$.
   (b) $*1 + *3 + *5 + *7 + *9$.
   (c) $*1 + *2 + *4 + \ldots + *2^n$.
   (d) $*1 + *3 + *7 + \ldots + *(2^n - 1)$.