

Exercices sur les graphes

Florian Bourse

1 Degrés

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté.

On note $\bar{G} = (S, \mathcal{P}(S) \setminus A)$ le *complémentaire* de G .

- [0] Exprimer le nombre d'arêtes de $\bar{G}$ en fonction du nombre de sommets et d'arêtes de G .
- [1] On note $d_{\min}$ et $d_{\max}$ les degrés minimal et maximal des sommets de G . Quels sont les degrés minimal et maximal des sommets de $\bar{G}$?
- [2] Montrer que dans tout graphe non-orienté avec au moins 2 sommets, il existe 2 sommets de même degré.
- [3] Soit G un graphe dont tous les sommets sont de degré 3. Montrer qu'il a nécessairement un nombre de sommets pair. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Construire un graphe à $2n$ sommets dont tous les sommets sont de degré 3.
- [4] Dans un graphe orienté, un *trou noir* est un sommet de degré entrant $n - 1$ et de degré sortant 0. Montrer qu'il est possible de déterminer si un graphe possède un trou noir en temps $O(n)$ étant donné sa matrice d'adjacence.

2 Triangles

Un *triangle* dans un graphe G est un ensemble de trois sommets $\{x, y, z\}$ tels que $x - y$, $y - z$, et $z - x$.

- [5] Soit G un graphe d'ordre 6 (c'est-à-dire avec 6 sommets). Montrer que G ou $\bar{G}$ contient un triangle.
- [6] Soit $G = (S, A)$ un graphe sans triangle à n sommets.
 - a) Montrer que pour tout $\{x, y\} \in A$, $\deg(x) + \deg(y) \leq n$.
 - b) Montrer que $\sum_{x \in S} \deg(x)^2 = \sum_{\{x, y\} \in A} \deg(x) + \deg(y)$.
 - c) En déduire que $\sum_{x \in S} \deg(x)^2 \leq |A|n$.
 - d) En déduire avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\left(\sum_{x \in S} \deg(x) \right)^2 \leq |A|n$.
 - e) En déduire que $|A| \leq \frac{n}{4}$.
- [7] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'adjacence d'un graphe $G : M_{i,j} = 1$ si $i - j$ et 0 sinon. Que représente M^i ? Proposer un algorithme permettant de dénombrer le nombre de triangles dans un graphe G donné.

3 Connexité

8] Démontrer ou infirmer les assertions suivantes :

- a) Un graphe G à $2n$ sommets de degré minimal n est connexe.
- b) Si un graphe G est connexe, alors son complémentaire $\bar{G}$ est non connexe.
- c) Si un graphe G est non connexe, alors son complémentaire $\bar{G}$ est connexe.
- d) Un graphe (S, A) est connexe si et seulement si pour tout $X \subset S$, il existe une arête ayant une extrémité dans X et l'autre dans $S \setminus X$.

On désigne par $\omega(G)$ la *connectivité* d'un graphe non orienté G , c'est-à-dire le nombre de ses composantes connexes. En particulier, G est connexe si et seulement si $\omega(G) = 1$. Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté et $I \subset S^2$.

9] Montrer $\omega(G) \geq \omega((S, A \cup I)) \geq \omega(G) - |I|$.

10] Montrer $\omega(G) \leq \omega((S, A \setminus I)) \leq \omega(G) + |I|$.

11] Montrer que si $\omega((S, A \setminus \{e\})) > \omega(G)$ pour tout $e \in I$, alors $\omega((S, A \setminus I)) = \omega(G) + |I|$.

12] Montrer $\omega(G) \geq |S| - |A|$.

13] On définit inductivement une classe de graphes non orientés $\mathcal{C}$ par :

- 1. tout sommet isolé est dans $\mathcal{C}$;
- 2. si $G \in \mathcal{C}$, tout graphe H obtenu en ajoutant à G un sommet x et une ou plusieurs arêtes adjacentes à x est dans $\mathcal{C}$.

Montrer que $\mathcal{C}$ est exactement la classe des graphes connexes.

4 Cycles

14] Montrer que si un graphe est 2-régulier (tous ses sommets ont degré 2), alors c'est une union de cycles disjoints.

15] Montrer qu'un graphe non orienté est un cycle si et seulement si il est non acyclique minimal.

Un *cycle eulérien* est un cycle qui contient toutes les arêtes d'un graphe.

16] Montrer que si un graphe admet un cycle eulérien alors tous ses sommets sont de degré pair.

17] Montrer que si tous les sommets d'un graphe sont de degré pair, alors il admet un cycle eulérien.

5 Arbres

18] Montrer qu'un arbre avec un sommet de degré 2017 possède au moins 2017 feuilles (une feuille est un sommet de degré 1).

19] Montrer qu'il existe n^{n-2} arbres sur n sommets.