

# Logique du premier ordre

Florian Bourse

0 Traduire en formule logiques du premier ordre les phrases suivantes. Introduire tous les prédicats nécessaires.

- a) Dans une école, il existe des ordinateurs non connectés au réseau local.
- b) Dans les écoles, tous les ordinateurs sont connectés à un réseau local.
- c) Dans chaque école, au moins un ordinateur est connecté à la fois au réseau local et à internet.

1  $x, y, z$  sont des symboles de variables. Soit  $F$  la formule du premier ordre définie par :

$$F = (\forall x. \exists y. f(g(x, y), a, z)) \wedge (\forall z. f(x, g(x, Q(a)), z))$$

- a) Pour chaque symbole dans  $F$ , dire si c'est un symbole de fonction ou un symbole de relation et donner son arité.
- b) Déterminer l'ensemble des termes et des formules atomiques de  $F$ .
- c) Pour chaque occurrence de variable dans  $F$ , indiquer si elle est libre ou liée; dans le cas où elle est liée, préciser par quel quantificateur.
- d) Effectuer la substitution  $F^{\{z:=Q(x)\}}$ .

2 On cherche à déterminer si un tableau  $a$  contient un doublon, c'est-à-dire un élément apparaissant deux fois. On se donne la fonction C suivante :

C

```
bool duplicate(int a[], int n) {
    for (int i = 0; i < n; i = i + 1) {
        for (int j = i + 1; j < n; j = j + 1) {
            if (a[i] == a[j]) { return true; }
        }
    }
    return false;
}
```

a) Voici quatre formules à propos d'un tableau  $a$  de taille  $n$ .

- (a)  $\forall i \in [0, n[. \forall j \in [0, n[. i \neq j \rightarrow t[i] = t[j]$
- (b)  $\forall i \in [0, n[. \exists j \in [0, n[. i \neq j \wedge t[i] = t[j]$
- (c)  $\exists i \in [0, n[. \forall j \in [0, n[. i \neq j \rightarrow t[i] = t[j]$
- (d)  $\exists i \in [0, n[. \exists j \in [0, n[. i \neq j \wedge t[i] = t[j]$

Pour chacune de ces formules, donner une traduction en langue naturelle et un exemple de tableau validant la formule. Quelle formule exprime effectivement le plus fidèlement la présence d'un doublon ?

b) Donner des invariants pour les deux boucles de la fonction `duplicate`, écrits comme des formules de logique du premier ordre.

3 On considère le problème de la recherche d'un motif  $m$  dans un texte  $t$ , et on se donne la fonction C suivante. La fonction renvoie l'indice de début d'une occurrence de  $m$  dans  $t$  s'il en existe une, et  $-1$  sinon.

C

```
int search(char *m, char *t) {
    int lm = strlen(m), lt = strlen(t);
    for (int i = 0; i <= lt - lm; i++) {
        int j = 0;
        while (j < lm) {
            if (m[j] != t[i+j]) break;
            j++;
        }
        if (j == lm) return i;
    }
    return -1;
}
```

- Donner des formules de logique du premier ordre exprimant la spécification du problème. Dans ces formules, on dénotera le résultat renvoyé par  $r$ .
- Donner des formules de logique du premier ordre exprimant les invariants de deux boucles.