

Relations d'ordres

Florian Bourse

1 Relations d'ordres

Une relation \mathcal{R} est :

réflexive si $\forall x, x\mathcal{R}x$;

transitive si $\forall x, \forall y, \forall z, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \rightarrow x\mathcal{R}z$.

antisymétrique si $\forall x, \forall y, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \rightarrow x = y$.

Une relation est une relation d'ordre si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

À une relation d'ordre \leq donnée, on associe l'ordre strict $<$ défini par

$$x < y \text{ ssi } x \leq y \text{ et } x \neq y$$

Un ensemble ordonné (E, \leq) est un ensemble muni d'une relation d'ordre.

Exemples :

- (\mathbb{N}, \leq)
- (\mathbb{R}, \leq)
- $(\mathbb{N}, |)$
- $(\mathcal{P}(E), \subset)$

Étant donné deux ensembles ordonnés (A, \leq_A) et (B, \leq_B) , on définit l'ordre produit sur $A \times B$ par

$$(a, b) \leq_x (a', b') \text{ ssi } a \leq_A a' \text{ et } b \leq_B b'$$

Un ensemble ordonné est bien fondé s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante.

(\mathbb{N}, \leq) est bien fondé.

Si (A, \leq_A) et (B, \leq_B) sont bien fondés, $(A \times B, \leq_x)$ est bien fondé.
À démontrer.

Une relation d'ordre est totale si tous les éléments sont comparables :

$$\forall x, y, x \leq y \text{ ou } y \leq x$$

2 Élément minimal, plus petit élément

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné.

x est le plus petit élément (ou minimum) de E si

$$\forall y \in E, x \leq y$$

- Montrer l'unicité s'il existe.
- Donner un exemple d'ensemble ordonné sans plus petit élément.
- Donner un exemple d'ensemble ordonné avec un plus petit élément mais la relation d'ordre n'est pas totale.
- Montrer que si (E, \leq) est bien fondé et que \leq est totale, alors il existe un plus petit élément.

x est un élément minimal de E si

$$\forall y \in E, y \leq x \Rightarrow y = x$$

autrement dit, aucun élément n'est strictement plus petit que x .

- Montrer que le plus petit élément s'il existe est minimal.
- Donner un exemple d'élément minimal qui n'est pas le plus petit.
- Donner un exemple d'ensemble comportant plusieurs éléments minimaux.

Remarque : on définit de manière équivalente le plus grand élément et un élément maximal.

Définition équivalente de bien fondé : (E, \leq) est un ensemble bien fondé si et seulement si toute partie non vide $X \subset E$ admet un élément minimal.

Démontrer l'équivalence entre les deux définitions.

Étant donné deux ensembles ordonnés (A, \leq_A) et (B, \leq_B) , on définit l'ordre lexicographique sur $A \times B$ par

$$(a, b) \leq_L (a', b') \text{ ssi } a < a' \text{ ou } a = a' \text{ et } b \leq_B b'$$

Si \leq_A et \leq_B sont totales, alors \leq_L l'est aussi.

Si (A, \leq_A) et (B, \leq_B) sont bien fondés, $(A \times B, \leq_L)$ est bien fondé.

À démontrer.

3 Prédécesseur, successeur

Si $x < y$, on dit que x est un prédécesseur de y et que y est un successeur de x .

Un successeur immédiat de x est un y qui est minimal parmi les successeurs de x .

Un prédécesseur immédiat de y est un x qui est maximal parmi les prédécesseurs de y .

Démontrer que si (E, \leq) est bien fondé, tout élément qui n'est pas maximal admet un successeur immédiat.

Donner un (E, \leq) bien fondé qui contient un élément non minimal sans prédécesseur immédiat.

Si (E, \leq) est fini, on peut représenter une relation d'ordre uniquement en donnant les successeurs immédiats de chaque élément. On parle de diagramme de Hasse pour une telle représentation graphique, où chaque élément est représenté dans un cercle, avec pour chaque élément une flèche vers chacun de ses successeurs immédiats. Parfois, on impose aussi que toutes les flèches vont vers le haut.

Tracer le diagramme de Hasse correspondant à $(\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}), \subset)$.

Pour retrouver la relation d'ordre à partir de la relation successeur immédiat, il suffit d'en prendre la clôture réflexive et transitive, c'est-à-dire la plus petite relation d'ordre réflexive et transitive qui contient la relation successeur immédiat.

4 Induction bien fondée

Soit (E, \leq) un ensemble bien fondé et soit P une propriété sur les éléments de E . Alors :

Si on peut montrer $P(x)$ en supposant $P(y)$ vrai pour tout $y < x$, alors $P(x)$ est vrai pour tout x de E .