Relations d'ordre, bonne fondation

M1 MEEF NSI

28 septembre 2020

On rappelle quelques définitions. Soit E un ensemble quelconque. Une *relation d'ordre* sur E est une relation binaire $\preccurlyeq$ qui est

réflexive : pour tout $x \in E$, on a $x \preccurlyeq x$;

transitive : pour tous $x, y, z \in E$ tels que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$, on a $x \preccurlyeq z$;

antisymétrique : pour tous $x, y \in E$ tels que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$, on a $x = y$.

Une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur E est dite

totale si pour tous $x, y \in E$, on a $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$;

bien fondée s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante pour $\preccurlyeq$.

Si $\preccurlyeq$ désigne une relation d'ordre, on notera naturellement $\prec$ la relation stricte associée (où $x \prec y$ si $x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$) et on notera $\succcurlyeq$ et $\succ$ les relations transposées.

Exercice 1 – *Ordres sur le produit*

Pour chacune des relations binaires sur $\mathbb{N}^2$ suivantes, dire s'il s'agit d'une relation d'ordre, et si c'est le cas, si elle est totale et si elle est bien fondée.

1. $(n,p) \preccurlyeq (n',p')$ ssi $n \leq n'$ et $p \leq p'$;

2. $(n,p) \preccurlyeq (n',p')$ ssi $n = n'$ et $p \leq p'$;

3. $(n,p) \preccurlyeq (n',p')$ ssi $n \leq n'$ ou $p \leq p'$;

4. $(n,p) \preccurlyeq (n',p')$ ssi $n < n'$ ou, $n = n'$ et $p \leq p'$;

5. $(n,p) \preccurlyeq (n',p')$ ssi $n + p \leq n' + p'$.

Exercice 2 – *Ordres sur les mots*

Soient E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. On note E^* l'ensemble des suites finies à valeurs dans E (appelées aussi *mots* sur E en théorie des langages). On définit l'ordre *lexicographique* $\preccurlyeq_L$ sur E^* en posant que $a_1 a_2 ... a_n \preccurlyeq_L b_1 b_2 ... p$ si et seulement si

— soit $n \leq p$ et $a_i = b_i$ pour tout $i \leq n$,

— soit il existe un $k \leq \min(n,p)$ tel que $a_k \prec b_k$ et $a_i = b_i$ pour tout $i < k$.

1. Démontrer que $\preccurlyeq_L$ est bien une relation d'ordre.

2. À quelle condition s'agit-il d'un ordre total ?

On suppose maintenant que $\preccurlyeq$ est bien fondée.

3. Montrer que $\preccurlyeq_L$ n'est pas bien fondée dès lors que E a deux éléments comparables.

4. Montrer que la relation $\preccurlyeq_{L'}$ qui consiste à comparer d'abord les longueurs de deux mots, puis utiliser l'ordre lexicographique dans le cas où les mots sont de même longueur, est une relation d'ordre bien fondée.

Exercice 3 – *Ordre d'inclusion*

Soit E un ensemble quelconque.

1. Montrer que l'inclusion, sur l'ensemble des parties finies de E, est un ordre bien fondé.

2. Montrer que cet ordre n'est pas bien fondé si on ne se limite pas aux parties finies, dès lors que E est infini.

Exercice 4 – *Induction bien fondée*
Soient E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre bien fondée sur E.

1. Montrer que tout sous-ensemble non vide de E a un élément minimal pour l'ordre $\preccurlyeq$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

2. Soit A un sous-ensemble de E. Supposons que pour tout $x \in E$, si pour tout $y \in E$ tel que $y \prec x$ on a $y \in A$ alors $x \in A$.

3. En déduire le *principe d'induction bien fondée* : si P est une propriété sur E telle que pour tout $x \in E$, $\forall y \prec x, P(y)$ implique $P(x)$, alors P est satisfaite par tous les éléments de E.

Exercice 5 – *Définition par induction*
On considère une définition récursive de fonction, par exemple

$$s(m,n) := \begin{cases} m & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } m = 0, \\ s(m-1, n-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans un premier temps, on suppose que cet énoncé définit bien une unique fonction de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, on le démontrera dans la suite.

1. Démontrer que pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ on a $s(m,n) \leq m$. On procèdera par induction bien fondée sur $\mathbb{N}^2$, en choisissant une relation d'ordre bien fondée qui convient.

On va maintenant démontrer que la fonction considérée est bien définit. Pour tout $x \in \mathbb{N}^2$, on note $D_x := \{y \in \mathbb{N}^2 \mid y \leq x\}$ l'ensemble des couples inférieurs à x pour l'ordre considéré. Pour tout $x \in \mathbb{N}^2$, on note $P(x)$ l'énoncé suivant :

Il existe une unique fonction $f_x : D_x \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $(m,n) \leq x$,

$$f(m,n) = \begin{cases} m & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } m = 0, \\ f(m-1, n-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Démontrer $\forall x \in \mathbb{N}^2, P(x)$ par induction.

3. En déduire qu'il existe une unique fonction s qui satisfait la définition considérée.

Exercice 6
On se donne les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} f(0,0) = 1 \\ f(n+1,m) = 2 \times f(n,m) & \forall m,n \in \mathbb{N} \\ f(n,m+1) = 3 \times f(n,m) & \forall m,n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \begin{cases} g(0,0) = 1 \\ g(n+1,m) = 2 \times g(n,m)^2 & \forall m,n \in \mathbb{N} \\ g(n,m+1) = 3 \times g(n,m) & \forall m,n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Trouver les valeurs que ces équations imposent pour $f(1,2)$, $f(2,1)$ et $f(2,2)$.

2. Montrer que les équations pour f définissent une fonction et une seule de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

3. Que calcule la fonction f ?

4. Est-ce que les équations pour g définissent une fonction et une seule ?