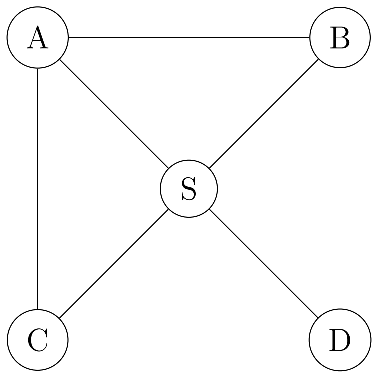
Chaînes de Markov

Florian Bourse

Ce sujet contient deux sections indépendantes qui peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

1 Réseau routier

On considère le réseau routier suivant, composé de 5 villes : S, A, B, C, et D, que l'on numérotera respectivement 0, 1, 2, 3, et 4.



Pour modéliser le trafic routier, nous considérons que les voitures empruntent une route sortant de leurs ville de façon équitable (uniforme).

Question 1. Donner la matrice de transition, i.e. $M = (m_{i,j})$ telle que $m_{i,j}$ correspond à la probabilité qu'une voiture à la ville i choisisse d'emprunter une route menant à la ville j. L'implémenter

Question 2. Écrire une fonction qui simule le comportement d'une voiture partant de la ville S durant 1000 étapes, et renvoie la ville où elle se trouve à la fin.
L'utiliser pour estimer la probabilité de se retrouver dans chacune des villes au bout de 1000 étapes en partant de la ville S.

Question 3. Partant de S, estimer le temps moyen nécessaire à une voiture pour revenir en S.

Question 4. Quelle est la probabilité que, partant de S, la voiture visite la ville D avant la ville C ?

2 Mouton

Un paisible mouton écossais se trouve chaque matin au milieu d'une lande carrée, de longueur de côté 20m, bordée d'une route. Durant la journée, pendant 10 heures, toutes les 5 minutes le mouton se déplace de 1m en choisissant au hasard une direction : soit le nord, soit le sud, soit l'est, soit l'ouest.
La moitié des jours de l'année, il est retrouvé, le soir, hors de la lande...
Est-ce normal ?

Question 5. Simuler le comportement du mouton pour répondre à la question.

Question 6. Calculer la valeur exacte de la probabilité qu'a le mouton de se retrouver hors de la lande.
On pourra utiliser une méthode de programmation dynamique.

Question 7. Représenter graphiquement la probabilité qu'a le mouton de se trouver en position (i, j) au bout de n déplacements, à l'aide d'un gradient de couleur, pour différentes valeurs de n.