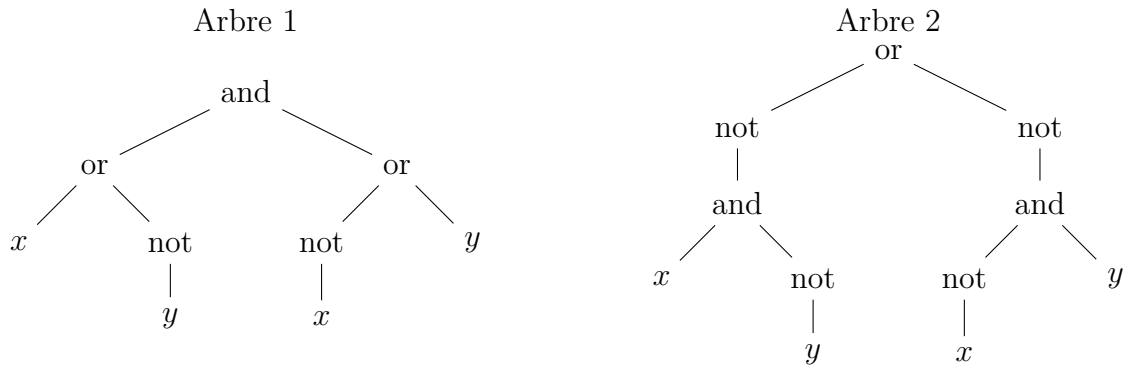


Logique Propositionnelle

Florian Bourse

1 Syntaxe des formules logiques

0 Écrire comme mots les formules logiques représentées par les arbres suivants :



1 On choisit de représenter les formules en OCaml comme suit :

Une définition des formules logiques en OCaml 🐘

```
type formula =  
  | V  
  | F  
  | Var of int  
  | Not of formula  
  | And of formula * formula  
  | Or of formula * formula  
  | Imp of formula * formula  
  | Eq of formula * formula;;
```

Représenter les arbres syntaxiques des formules logiques suivantes, puis les écrire comme mots.

Exemples de formules 🐘

```
let f1 = Imp(Or(Var 1, Var 2), Or(Var 3, Var 2));;  
let f2 = Or(Imp(Var 1, Var 2), Not(Var 1));;  
let f3 = And(Or(Or(Var 1, Var 2), Not(Var 3)), Var 4);;  
let f4 = Or(Var 1, And(Var 2, Or(Not(Var 3), Var 4)));;
```

2 Sémantique de vérité du calcul propositionnel

2] x et y désignent deux variables propositionnelles. On pose $\varphi = (x \vee y)$ et $\psi = (x \rightarrow y)$, ainsi que $\omega = (\varphi \rightarrow \psi)$.

1. Quelles valuations donnent la même valeur aux formules φ et ψ ?
2. Quel est l'ensemble des modèles de ω , noté $\text{mod}(\omega)$?
3. Une formule est dite *contingente* si elle est satisfiable sans être tautologique. La formule ω est-elle contingente ou tautologique ?

3] x et y désignent deux variables propositionnelles. Parmi les trois formules suivantes, l'une est une tautologie, une autre est contingente et une dernière est insatisfiable. Les identifier.

$$\varphi_1 = (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

$$\varphi_2 = x \rightarrow (y \rightarrow x)$$

$$\varphi_3 = (x \wedge y) \leftrightarrow (x \rightarrow \neg y)$$

4] φ et ψ désignent deux formules logiques.

1. Montrer les deux équivalences suivantes.
 - (a) $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$
 - (b) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$
2. En déduire deux formules sémantiquement équivalentes aux formules suivantes dans lesquelles seuls les connecteurs \neg , \wedge et \vee apparaissent.
 - (a) $(\varphi \leftrightarrow \psi)$
 - (b) $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi$

5] Étant donné trois formules logiques φ, ψ, ω , on définit l'opérateur ternaire Δ par : $\Delta(\varphi, \psi, \omega) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \omega)$.

1. Écrire sous la forme la plus simple les formules $\Delta(\top, \psi, \omega)$ et $\Delta(\perp, \psi, \omega)$.
2. Exprimer $(\varphi \wedge \psi)$ et $(\varphi \vee \psi)$ par une formule ne comportant qu'un seul Δ .
3. Exprimer $(\neg\varphi)$ en fonction de Δ , de \top et de \perp .

6] φ et ψ désignent deux propositions logiques.

1. (a) Prouver l'équivalence $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (*contraposition*)
 (b) Prouver l'équivalence $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \omega)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \omega)$ (*exportation*)
 (c) Prouver que $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ est une tautologie (*loi de Pierce*)
 (d) Si x, y, z sont trois variables propositionnelles, que dire de la formule : $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z))$?
2. (a) Prouver que $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$.
 (b) Prouver que $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ est une tautologie.

3 Sudoku

On suppose donnée une grille de jeu avec un certain nombre de cases déjà remplies. Afin de compléter la grille, on va définir une formule logique qui, si elle est satisfiable, permet de construire une solution. Pour modéliser le problème en termes logiques, on adopte les notations suivantes.

- Chaque ligne du tableau est repérée par un entier $r \in \llbracket 0, 8 \rrbracket$.
- Chaque colonne du tableau est repérée par un entier $c \in \llbracket 0, 8 \rrbracket$.
- Chaque case contient un entier $k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$.

On définit alors une variable propositionnelle $x_{r,c,k}$ dont la valeur de vérité est V si la case (r, c) du tableau solution contient la valeur k ; F sinon.

7

- a) Sachant que chaque case doit contenir au moins un entier non nul, écrire une CNF C_1 qui exprime cette contrainte.
- b) Sachant que chaque case doit contenir au plus un entier non nul, écrire une CNF C_2 qui exprime cette contrainte.
- c) Sachant que chaque ligne doit contenir exactement une seule occurrence de chaque entier, écrire une CNF C_3 qui exprime cette contrainte.
- d) Sachant que chaque colonne doit contenir exactement une seule occurrence de chaque entier, écrire une CNF C_4 qui exprime cette contrainte.
- e) Sachant que chaque sous-groupe 3×3 doit contenir exactement une seule occurrence de chaque entier, écrire une CNF C_5 qui exprime cette contrainte.
- f) On note I l'ensemble des triplets (r, c, k) des cases (r, c) et des entiers k initialement présents dans la grille. Écrire une CNF C_0 qui traduit la présence de ces chiffres dans la solution du problème.
- g) En déduire une formule φ associée au problème du Sudoku.

8

- a) Combien de variables propositionnelles le problème comporte-t-il ?
- b) Si on omet la clause C_0 , combien φ comporte-t-elle de clauses disjonctives ?

9 En généralisant le problème du Sudoku à une grille $n \times n$ où $n = d^2$, $d \in \mathbb{N}^*$, montrer que le nombre de clauses disjonctives dans φ est un $O(n^4)$.

10 Si la formule est satisfiable, comment la connaissance des valeurs de vérité de chaque variable permet-elle la construction de la solution ?