

Mots et langages

Florian Bourse

- 0 Déterminer les facteurs, les préfixes et les suffixes du mot $u = abac$.
- 1
1. Compter les occurrences des lettres a et b dans les mots suivants : $a^3cbbca, aabgjdd, titi, abc$.
 2. Donner l'ensemble des couples (u, v) tels que $uv = abaac$.
 3. Calculer LM pour les ensembles suivants :
 - $L = \{a, ab, bb\}$ et $M = \{\varepsilon, b, a^2\}$;
 - $L = \emptyset$ et $M = \{a, ba, bb\}$;
 - $L = \{\varepsilon\}$ et $M = \{a, ba, bb\}$;
 - $L = \{aa, ab, ba\}$ et $M = \{a, b\}^*$.
- 2 Prouver les assertions suivantes, où V est un alphabet, $a, b \in V$ et $u, v, x, y \in V^*$.
 - $au = bv \Rightarrow a = b \wedge u = v$;
 - $xu = xv \Rightarrow u = v$;
 - $(xu = yv \wedge |x| = |y|) \Rightarrow u = v$;
 - $(xu = yv \wedge |x| \leq |y|) \Rightarrow (x \text{ est préfixe de } y \text{ et } v \text{ est suffixe de } u)$.
- 3 Soient u et v deux mots. Montrer que $uv = vu$ si et seulement si il existe $\gamma \in V^*$ et $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $u = \gamma^p$ et $v = \gamma^q$.
- 4 Montrer que :
1. Il n'existe pas de mot $x \in \{a, b\}^*$ tel que $ax = xb$.
 2. Il n'existe pas de mots $x, y \in \{a, b\}^*$ tels que $xay = ybx$.
- 5 Soit A, B, C trois langages sur un même alphabet. Prouver les propriétés suivantes :
1. $(AB)C = A(BC)$;
 2. $(A^*)^* = A^*$;
 3. $A \subset B \Rightarrow A^* \subset B^*$;
 4. $A(B \cup C) = AB \cup AC$;
 5. $A(B \cap C) \subset AB \cap AC$, et l'inclusion réciproque est fausse en général ;
 6. $(A \cup B)^* = (A^*B^*)^*$.
- 6 Soient A, B deux langages sur un même alphabet.
1. Comparer $(A \cup B)^*$ et $A^* \cup B^*$.
 2. Comparer $(A \cap B)^*$ et $A^* \cap B^*$.
 3. Comparer $(AB)^*$ et A^*B^* .
- 7 Deux mots u et v sont dits *conjugués* s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que $u = w_1w_2$ et $v = w_2w_1$. En d'autres termes, v s'obtient à partir de u par permutation cyclique de ses lettres.
1. Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence. (réflexive, symétrique, transitive)
 2. Montrer que u et v sont conjugués si et seulement s'il existe un mot w tel que $uw = wv$.

8 On appelle *code* sur un alphabet V tout langage X sur V tel que pour tous $x_1, \dots, x_p \in X$ et pour tous $y_1, \dots, y_q \in X : x_1 \dots x_p = y_1 \dots y_q \Rightarrow (p = q \text{ et } \forall i \leq p : x_i = y_i)$. Autrement dit, X est un code ssi tout élément de X^* se factorise de manière unique sur X .

1. Les langages suivants sont-ils des codes ?
 - $X_1 = \{ab, baa, abba, aabaa\}$;
 - $X_2 = \{b, ab, baa, abba, aaaa\}$;
 - $X_3 = \{aa, ab, aab, bba\}$;
 - $X_4 = \{a, ba, bba, baab\}$.
2. Soit $u \in V^*$. Montrer que le singleton $\{u\}$ est un code si et seulement si $u \neq \varepsilon$.
3. Soit u et v deux mots distincts sur V . Montrer que la paire $\{u, v\}$ est un code si et seulement si u et v ne commutent pas.
4. Soit X une partie de V ne contenant pas ε et telle qu'aucun mot de X n'est préfixe propre d'un autre mot de X . Montrer qu'alors X est un code. (Un tel code est appelé *code préfixe*.)